

## PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLIV.

**I. Ueber die Compressibilität von Schwefelkohlenstoff, Benzol, Aethyläther und einigen Alkohole;  
von W. C. Röntgen.**

(Hierzu Taf. I Fig. 1–2.)

Die folgende Abhandlung enthält die Resultate von Versuchen, welche ich in den Jahren 1888 und 1889 im hiesigen physikalischen Institut angestellt habe. Zwischen ihr und der gemeinschaftlich mit Hrn. Zehnder veröffentlichten Arbeit: „Ueber den Einfluss des Druckes auf die Brechungsexponenten von Schwefelkohlenstoff etc.“ (Vgl. p. 24) besteht ein leicht erkennbarer Zusammenhang; beide Untersuchungen wurden gleichzeitig und mit denselben Flüssigkeiten ausgeführt.

Die zur Bestimmung der Compressibilität angewandte Methode, sowie die benutzten Apparate sind ausführlich in früheren Abhandlungen beschrieben<sup>1)</sup>; ich kann mich deshalb auf die Mittheilung der inzwischen vorgenommenen Aenderungen beschränken.

Wegen der bedeutend grösseren Compressibilität der jetzt untersuchten Flüssigkeiten musste die Calibrirung der Capillare des Piézometers I auf eine grössere Strecke ausgedehnt werden. Hr. Dr. Schneider hatte die Güte, in den Weihnachtsferien 1888 von Mainz hierher zu kommen und die Calibrirung auszuführen: für diese Förderung der Arbeit sage ich dem genannten Herrn meinen besten Dank.

1) Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. **29**. p. 165. 1886; **31**. p. 1000. 1887; **33**. p. 644. 1888; **34**. p. 531. 1888.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. **XLIV**.

Für die Capillare des Piézometers I ergibt sich unter Annahme des Normalquerschnittes jener Capillare zu 0,003 555 qcm folgende

Correctionstabelle.

Theilstriche	Correction	Theilstriche	Correction
0	+0,279	15	+0,023
1	+0,258	16	+0,012
2	+0,227	17	+0,007
3	+0,207	18	±0,000
4	+0,188	19	−0,003
5	+0,169	20	−0,009
6	+0,150	21	−0,012
7	+0,136	22	−0,014
8	+0,118	23	−0,013
9	+0,103	24	−0,014
10	+0,090	25	−0,010
11	+0,074	26	−0,011
12	+0,063	27	−0,005
13	+0,048	28	±0,000
14	+0,035		

Die Correctionen für die zwischenliegenden Millimeterstriche wurden durch lineare Interpolation erhalten. Die Correctionstabelle für die Capillare von Piézometer II findet man Wied. Ann. 29. p. 174. 1886.

Das Piézometer II war bei den im Folgenden beschriebenen Versuchen stets mit Wasser gefüllt und Piézometer I diente zur Aufnahme der anderen Flüssigkeiten.

Zum Dichten der Piézometer wurde, wo es anging z. B. bei Wasser und Amylalkohol, wie früher, Hahnfett verwendet; bei den übrigen Flüssigkeiten eine sehr verdünnte Gummilösung. Da immer nur Spuren dieser Dichtungsmittel genommen wurden, ist eine merkliche Verunreinigung der betreffenden Flüssigkeiten nicht zu befürchten.

Durch Vorveruche belehrt habe ich als erreichbares Ziel für die Genauigkeit der Resultate der neuen Compressibilitätsversuche den Werth 0,5 Proc. des Endresultates festgesetzt. Dieses Ziel dürfte wohl immer erreicht sein, und es ist sogar sehr wahrscheinlich, dass die Fehler einzelner Resultate noch kleiner sind.

Dass ich mir dieses Ziel nicht weiter gesteckt habe, ist hauptsächlich einer Fehlerquelle zuzuschreiben, die bei den



früheren Versuchen mit verdünnten Lösungen keine so grosse Rolle spielte, wohl aber bei der Bestimmung der scheinbaren Compressibilität des Wassers und ebenso bei den folgenden Versuchen. Ich meine die Erscheinung, dass beim Comprimiren der Flüssigkeiten an der Wand der Capillare des Piézometers eine Schicht hängen bleibt, um deren Volumen die durch Compression erzeugte Volumenverminderung der Flüssigkeit zu gross erscheint. Der Betrag dieses Fehlers ist nicht leicht genau festzustellen, namentlich bei den Flüssigkeiten, die zu der vorliegenden Arbeit benutzt wurden.

Auf folgendem Wege habe ich die Grösse dieses Fehlers zu bestimmen versucht. Von einem der beiden Piézometer wurde die Capillare abgenommen und nach sorgfältiger Reinigung in umgekehrter Stellung vertikal aufgestellt, sodass das umgebogene Ende sich unten befand. In den kürzeren der beiden Schenkel der Capillare brachte ich einen Tropfen der betreffenden Flüssigkeit; daraus bildete sich in dem gebogenen Theil ein zusammenhängender Faden. Nach Verlauf von einer Viertelstunde wurde die Länge dieses Fadens oder vielmehr die Lage der Enden des Fadens an einem hintergestellten Maassstab mit Hülfe eines Fernrohrs beobachtet, und nun der Flüssigkeitsfaden durch Saugen um eine bestimmte Anzahl Theilstriche des Maassstabes in den längeren, trockenen Schenkel der Capillare verschoben. Darauf brachte ich den Faden sehr langsam wieder in die Anfangslage zurück und beobachtete nach einer Viertelstunde, um wie viel derselbe infolge der Benetzung der Röhrenwand kürzer geworden war. In dieser Weise erhielt ich für die Verkürzung des Fadens pro Centimeter Verschiebung folgende Werthe:

Tabelle I.

Wasser. . . . .	0,006 cm	n. Propylalkohol . . . .	0,014 cm
Schwefelkohlenstoff . .	0,005 "	Isopropylalkohol . . . .	0,015 "
Benzol . . . . .	0,006 "	n. Butylalkohol . . . .	0,012 "
Aethyläther . . . . .	0,009 "	Isobutylalkohol . . . .	0,015 "
Methylalkohol . . . .	0,010 "	Amylalkohol . . . . .	0,015 "
Aethylalkohol . . . .	0,010 "		

Die obigen Werthe sind Mittelwerthe aus verschiedenen Versuchen, deren Uebereinstimmung unter einander keines-

wegs sehr gut ist; die Zahlen dürfen daher blos zu dem angegebenen Zweck verwendet werden.

Da alle anderen Werthe und Fehler, die bei der Bestimmung der Compressibilität vorkommen, sich genauer als die zuletzt besprochenen bestimmen lassen, so ist es für spätere Versuche angezeigt, weitere Capillaren zu nehmen; ist doch der Einfluss dieses Fehlers auf das Resultat der Weite der Capillare umgekehrt proportional.

Eine zweite Correction muss an den direct abgelesenen Werthen der durch die Compression erzeugten Volumenänderungen angebracht werden in Folge der durch die Druckänderungen verursachten Temperaturänderungen. Zwar wurde wieder wie früher nach jeder Compression resp. Dilatation eine Viertelstunde gewartet, bevor die betreffende Ablesung gemacht wurde, sodass der grössere Theil der entstandenen Temperaturdifferenzen ausgeglichen werden konnte; allein dieses Verfahren, welches bei den früheren Versuchen zur Eliminirung des Fehlers genügte, reichte jetzt nicht mehr aus, da die untersuchten Flüssigkeiten einen viel grösseren thermischen Ausdehnungscoefficienten haben als Wasser und Salzlösungen. Ich suchte deshalb die eine Viertelstunde nach erfolgter Druckänderung noch nicht ausgeglichene Temperaturänderung mit Hilfe eines besonderen Schwefelkohlenstoffthermometers direct zu bestimmen.

Dieses Thermometer hat ungefähr dieselben Dimensionen wie die Piézometer; durch Erwärmen desselben um  $1,00^{\circ}\text{C}$ . steigt der Schwefelkohlenstoff in der Capillare um 270 Scaletheile. Dasselbe ist eingeschlossen in einen nur wenig weiteren, starken Eisencylinder mit aufgesetzter, eingekitteter Glasröhre, welche die Capillare umgibt, um den Stand des Thermometers ablesen zu können. Der zwischen dem Eisencylinder und der Thermometerbirne vorhandene Raum ist mit Quecksilber ausgefüllt. Das in dieser Weise gegen äusseren Druck geschützte Thermometer wurde an die Stelle der Piézometer in das Compressionsgefäss gebracht, sodass der Eisencylinder ganz in dem Quecksilber des Compressionsgefässes untergetaucht war.

Bei allen Compressionsversuchen, aber namentlich bei diesen Versuchen über die Compressionswärme, war es durch-

aus nöthig, dass die Temperatur des Bades, in welchem der Compressionscylinder stand, sich während längerer Zeit nur wenig und ausserdem sehr gleichmässig änderte. Leicht war dies nicht zu erreichen trotz der grossen Menge Wasser, welche das Bad enthielt; viele Vorversuche mussten angestellt werden, bis ich die genügende Erfahrung gewonnen hatte, um durch Reguliren von Gasflammen, die in dem ziemlich grossen Beobachtungsraum brannten, sowie der Ventilationsklappen eine regelmässige, langsame Temperaturänderung des Bades herzustellen. Dass mir dies in genügender Weise gelungen ist, zeigen die unten mitgetheilten Beobachtungen.

Der Versuch wurde nun in folgender Weise ausgeführt. Hatte sich durch fortgesetzte Beobachtung des  $\text{CS}_2$ -Thermometers ergeben, dass die Temperatur sich regelmässig änderte, so wurde auf ca. 8 Atmosphären comprimirt und der Stand des Thermometers fortwährend mit einem Fernrohr bestimmt; nach einiger Zeit, etwa 30 Minuten, wurde die Compression aufgehoben und von nun an während einer Stunde und länger wieder das Thermometer beobachtet. Stellte sich heraus, dass der Temperaturverlauf jetzt derselbe war, wie vor der Compression, so konnte ich annehmen, dass auch in der Zwischenzeit die Badtemperatur sich in derselben Weise geändert hatte, und der Versuch galt als brauchbar. Im anderen Fall musste er verworfen werden.

Von zwei Versuchen möchte ich die Resultate mittheilen, indem ich mich darauf beschränke, nur diejenigen Werthe anzugeben, welche für die vorliegende Frage von Interesse sind. In der ersten Columne der Tabelle (p. 6) sind die Zeiten angegeben, zu welchen die in der zweiten Columne verzeichneten Theilstriche von dem Schwefelkohlenstoff in der Capillare des Thermometers erreicht wurden.

In Fig. 1 und 2 Taf. I sind diese Beobachtungen graphisch dargestellt, indem die Zeiten als Abscissen und die Theilstriche der Thermometerscala als Ordinaten gewählt wurden. Aus diesen Zeichnungen erkennt man am besten, dass eine Viertelstunde nach der Compression die durch diese erzeugte Temperaturdifferenz noch nicht vollständig ausgeglichen war.

Tabelle II.

Erster Versuch bei steigender Temperatur.				Zweiter Versuch bei abnehmender Temperatur.			
4 <sup>h</sup>	53 <sup>m</sup>	30 <sup>s</sup>	26	5 <sup>h</sup>	26 <sup>m</sup>	0 <sup>s</sup>	18
	59	45	27		32	0	17
5	6	20	28	Auf ca. 8 Atm. comprimirt.			
	11	30	29	5	33	0	18
Comprimirt auf ca. 8 Atm.				Der CS <sub>2</sub> stieg noch um 0,2 Th. um dann zu fallen.			
5	12	30	30	5	35	30	18
	18	30	31		39	30	17
	28	45	32		44	15	16
	30	30	33		49	30	15
	37	15	34		54	30	14
	43	10	35		59	0	13
Der Druck wurde aufgehoben; der CS <sub>2</sub> ging um 0,9 Th. zurück und stieg dann wieder.				Der Druck wurde aufgehoben.			
5	49	30	35	5	59	50	12
	54	0	36	6	2	50	11
6	0	0	37		10	0	10
	6	15	38		16	0	9
	12	45	39		21	10	8
	19	30	40		27	10	7
					32	10	6
					37	35	5

Um die Versuche richtig interpretiren zu können, ist es nöthig, dass man sich von den sich abspielenden Vorgängen eine genaue Vorstellung verschafft. Nehmen wir dazu einmal an, dass die Temperatur des Bades während der ganzen Versuchsdauer absolut constant bleibt, und dass das Bad und der Compressionsapparat sammt Inhalt zu Anfang des Versuchs genau gleiche Temperatur haben. Eine Compression hat dann zur Folge, dass die Temperatur im Innern des Druckapparates steigt; die entstandene Temperaturdifferenz wird im ersten Augenblick nach der Compression verhältnissmässig rasch, dann aber immer langsamer und langsamer ausgeglichen werden. Wie die Versuche zeigen, ist eine Viertelstunde nach der Compression die mit dem CS<sub>2</sub>-Thermometer gemessene Temperatur im Innern des Compressionscylinders noch merklich höher als die im Bad, und diese Temperaturdifferenz ändert sich in der folgenden Viertelstunde nur noch sehr wenig. Erfolgt nun eine Dilatation, so wird die Temperatur plötzlich unter die Temperatur des Bades sinken; sie steigt dann zuerst wieder rasch, hat aber eine halbe Stunde später den Anfangswerth noch nicht er-

reicht. Die Temperatur im Compressionscyliner ist jetzt um ebenso viel niedriger als die des Bades, als sie vor der Dilatation höher war.

Würde man folglich die Versuche zur Bestimmung der Compressibilität bei absolut constanter Badtemperatur anstellen, so müsste die in den Piézometern beobachtete Volumenänderung um den doppelten Betrag der Volumenänderung vergrössert werden, welche die nach einer Viertelstunde seit stattgefundener Compression oder Dilatation zurückgebliebene Temperaturdifferenz erzeugt hat.

Die geschilderten Verhältnisse werden sich nun wohl etwas ändern, wenn die Temperatur des Bades nicht constant bleibt, sondern, wie es bei den Versuchen der Fall war, langsam steigt oder fällt; indessen wird man doch die unter diesen Umständen gemachten Beobachtungen in ähnlicher Weise verwerthen dürfen, wie es oben auseinander gesetzt wurde; namentlich da es sich um die Bestimmung eines kleinen Fehlers handelt.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass der Verlauf der Temperatur im Innern des Compressionscyliners ein anderer wäre, wenn der Apparat undicht wäre, oder der Druck infolge von elastischer Nachwirkung noch längere Zeit nach der Compression sich beträchtlich ändern würde. Da ich mich bei den Compressionsversuchen stets davon überzeugte, dass der Apparat dicht war, und da die elastische Nachwirkung infolge der mit eingesperrten Luft den Druck nur sehr wenig beeinflusste, so ist von dieser Seite kein Fehler zu befürchten.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass jedesmal bevor eine Reihe von Versuchen zur Bestimmung der Compressibilität angefangen wurde, der Inhalt des Druckapparates einmal auf ca. 8 Atm. comprimirt wurde.

Aus den oben mitgetheilten und den übrigen Versuchen entnehme ich, dass die als Fehler in Rechnung zu bringende Compressionswärme, gemessen in Theilstrichen des  $\text{CS}_2$ -Thermometers im Mittel 1,0 Theilstriche beträgt oder in Celsiusgraden  $0,0037^\circ$ . Daraus und aus der bei Gelegenheit der Compressionsversuche gefundenen scheinbaren Ausdehnung der verschiedenen Flüssigkeiten in den Piézometern be-

rechnete ich die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe, wobei vorausgesetzt wurde, dass die Druckänderungen bei allen Flüssigkeiten und bei allen vorkommenden Temperaturen dieselben Temperaturdifferenzen zurückgelassen haben; das ist erlaubt, weil die Piézometer stets in derselben Flüssigkeit, Quecksilber, untergetaucht waren.

Die in der Tab. III enthaltenen Zahlen geben an, um wie viel die durch einen Druck von circa 8 Atm. in den Piézometern erzeugten Niveausenkungen vergrößert werden müssen, um den Fehler der Compressionswärme zu eliminiren.

Tabelle III.

Wasser 18° . . . . .	0,010 cm	Aethylalkohol . . . . .	0,065 cm
" circa 4° . . . . .	0,000 "	n-Propylalkohol . . . . .	0,060 "
Schwefelkohlenstoff . . . . .	0,070 "	Isopropylalkohol . . . . .	0,065 "
Benzol . . . . .	0,075 "	n-Butylalkohol . . . . .	0,060 "
Aethyläther . . . . .	0,080 "	Isobutylalkohol . . . . .	0,060 "
Methylalkohol . . . . .	0,070 "	Amylalkohol . . . . .	0,055 "

Zwei Umstände, welche zu grösseren Fehlern Veranlassung geben könnten, müssen noch besprochen werden. Ueber den Flüssigkeiten in den Piézometern befindet sich Luft, welche auch mit dem Wasser des Compressionscylinders in Berührung ist. Man könnte nun erstens vermuthen, dass das Volumen derjenigen Flüssigkeiten, welche begierig Wasser aufnehmen, durch Wasseraufnahme fortwährend wächst. Diese Frage ist schon früher bei Gelegenheit der Versuche mit concentrirter Schwefelsäure berührt worden. Die Erfahrung lehrt, dass die Diffusion von Wasserdampf durch die lange, enge Capillare des Piézometers so langsam vor sich geht, dass eine merkliche Absorption von Wasser selbst nach 36 Stunden nicht erfolgt ist.

Zweitens könnte man der Verwendung von Luft zum Abschliessen der betreffenden Flüssigkeit den Vorwurf machen, dass namentlich bei den sehr flüchtigen Substanzen wie Aethyläther und Schwefelkohlenstoff eine Menge Dampf aus dem abschliessenden Luftraum bei der Compression condensirt wird, welche das Volumen der Flüssigkeit vermehren und dadurch die Compressibilität zu klein erscheinen lassen würde. Die Rechnung ergibt in der That, dass wenigstens bei den beiden genannten Flüssigkeiten diese condensirte Dampfmenge einen Fehler von ziemlich beträchtlicher Grösse er-

zeugen könnte; freilich vorausgesetzt, dass der ganze Luftraum im Piëzometer und in der Gabel mit den betreffenden Dämpfen gesättigt ist, und dass aller in der Capillare condensirte Dampf sich auf der Oberfläche der Flüssigkeit in der Capillare ansammelt. Ich habe deshalb Versuche mit einer Capillare, die in ihrem unten verschlossenen Theil ein wenig von der genannten Flüssigkeit enthielt, und welche an die Stelle des einen Piëzometers in den Compressionscyliner eingesetzt wurde, angestellt; fand aber, dass die durch Compression condensirte Dampfmenge keinen merklichen Einfluss auf den Stand der Flüssigkeit in der Capillare ausübte. Dieses Resultat findet seine Erklärung darin, dass erstens der Luftraum infolge der durch die lange Capillare sehr gehinderten Diffusion gar nicht vollständig mit dem betreffenden Dampf gesättigt ist und dass zweitens der condensirte Dampf zum grössten Theil an der Capillarwand hängen bleibt.

Eine kurze Rechnung zeigt, dass die übrigen Fehlerquellen<sup>1)</sup> in Anbetracht der jetzt angestrebten Genauigkeitsgrenze unberücksichtigt bleiben können.

Zur Messung und Controlirung der Badtemperatur dienten vier Thermometer; zwei in ganze Grade getheilte waren in verschiedener Höhe in der Luft dicht neben dem Wasserbad aufgehängt; zwei andere in  $\frac{1}{10}^{\circ}$  getheilte ebenfalls in verschiedener Höhe dicht neben dem Compressionsapparat. In den folgenden Tabellen ist das Mittel aus den Ständen der beiden zuletzt genannten Thermometer angegeben; selbstverständlich waren dieselben vorher mit einem Normalquecksilberthermometer verglichen.

Die Compressibilität aller Flüssigkeiten, mit Ausnahme des Aethyläthers, wurde bei zwei verschiedenen Temperaturen bestimmt; die eine lag in der Nähe von  $18^{\circ}$  C. die andere schwankte zwischen  $2^{\circ}$  und  $6^{\circ}$ . Da es immer nothwendig war, dass die Luft im ganzen Beobachtungsraum ziemlich dieselbe Temperatur hatte, wie das Bad, und diese Temperatur sich auch während längerer Zeit nicht viel mehr als um ein bis zwei Zehntel ändern durfte, so mussten die Versuche im Winter gemacht werden, und nahmen dieselben viel Zeit in Anspruch.

1) Siehe Wied. Ann. 29. p. 177. 1886.



Dass der Aethyläther nicht bei 18° untersucht wurde, kommt daher, dass ich trotz wiederholter Versuche die Bildung von kleinen Dampfbläschen im Piézometer an der Stelle, wo der Stöpsel eingesetzt ist, nicht vermeiden konnte. Wiewohl die zum Dichten benutzte Gummilösung, wie schon erwähnt, nur in minimalster Quantität verwendet wurde, genügte dieselbe doch, um bei dieser Temperatur eine Tage lang fortgesetzte Bläschenbildung zu erzeugen, welche eine Bestimmung der Compressibilität mit der gewünschten Genauigkeit unmöglich machte.

Der Druck im Compressionsapparat wurde bei fast allen Versuchen von einer auf circa acht Atmosphären erhöht; folglich gelten die gefundenen Werthe der Compressibilität auch nur für diese Druckvermehrung.

Die untersuchten Flüssigkeiten sind zum grössten Theil von C. A. Kahlbaum in Berlin bezogen. Der Bestellung wurde die Bitte hinzugefügt, die betreffenden Substanzen möglichst rein zu liefern. Die Kahlbaum'schen Flüssigkeiten sind: thiophenfreies Benzol, Aethyläther über Natrium destillirt, und die verschiedenen Alkohole; der Aethylalkohol war angeblich 99,8 procentig. Von Schwefelkohlenstoff wurden zwei Sorten untersucht: die eine (Nr. I) war bei einem hiesigen Drogisten gekauft; die zweite (Nr. II) verdanke ich der Freundlichkeit des Hrn. Collegen E. Fischer, welcher denselben besonders zu meinen Versuchen reinigen liess. Eine chemische Prüfung der Reinheit der genannten Substanzen hat von meiner Seite nicht stattgefunden, dagegen bestimmte ich ihre Dichte und ihren Brechungsexponenten für Na-Licht möglichst genau. — Alle Bestimmungen, deren Resultate in dieser und in der folgenden mit L. Zehnder veröffentlichten Abhandlung enthalten sind, wurden mit Flüssigkeiten derselben Sendung ausgeführt, sodass die zusammengehörigen Werthe stets Constanten einer und derselben Flüssigkeit darstellen.

---

Ich theile zuerst die Dichtebestimmungen mit; dieselben wurden mit einem Sprengel'schen Pyknometer ausgeführt. Der Gewichtssatz war mit einem Normalgewichtsstück ver-



glichen. Die Wägungen ergaben vor der Reduction auf den luftleeren Raum:

Pyknometer leer . . . . .	18,0639 g
„ mit Wasser von 18,30° . . .	29,1526 g.

Barometerstand 74,5 cm; Lufttemperatur 18,0°. Daraus ergibt sich der Inhalt des Pyknometers bei 18,30° = 11,1161 cm.<sup>3</sup>)

Die übrigen Wägungen ergaben:

Pyknometer mit Schwefelkohlenstoff Nr. II . . . . .	bei 18,35°	32,1242 g
„ „ thiophenfreiem Benzol . . . . .	18,35°	27,8429 „
„ „ Benzol aus Benzoesäure . . . . .	18,20°	27,8452 „
„ „ Aethyläther (erste Füllung) . . . . .	18,10°	26,0189 „
„ „ „ (zweite Füllung) . . . . .	18,05°	26,0177 „
„ „ Methylalkohol . . . . .	18,20°	26,8715 „
„ „ Aethylalkohol . . . . .	18,40°	26,8499 „
„ „ n-Propylalkohol . . . . .	18,35°	27,0123 „
„ „ Isopropylalkohol . . . . .	18,45°	26,9398 „
„ „ n-Butylalkohol . . . . .	18,20°	27,0915 „
„ „ Isobutylalkohol . . . . .	18,10°	26,9959 „
„ „ Amylalkohol . . . . .	18,35°	27,0880 „

Der Barometerstand schwankte an den Tagen der Wägungen wenig um 74,5 cm herum, die Lufttemperatur zwischen 17° und 19°.

Aus diesen Wägungen berechnen sich folgende Werthe für die Dichte.

Tabelle IV.

Schwefelkohlenstoff Nr. II . . . . .	bei 18,35°	1,2660
Thiophenfreies Benzol . . . . .	18,35°	0,8808
Benzol aus Benzoesäure . . . . .	18,20°	0,8809
Aethyläther über Na destillirt . . . . .	18,10°	0,7167
„ „ „ . . . . .	18,05°	0,7166
Methylalkohol . . . . .	18,20°	0,7994
Aethylalkohol 99,8 Proc. . . . .	18,40°	0,7914
n-Propylalkohol . . . . .	18,35°	0,8061
Isopropylalkohol . . . . .	18,45°	0,7995
n-Butylalkohol . . . . .	18,20°	0,8132
Isobutylalkohol . . . . .	18,10°	0,8040
Amylalkohol . . . . .	18,35°	0,8124

Die Versuche zur Bestimmung der Compressibilität lieferten folgende Resultate. In der Tabelle V sind die an den Piëzometern gemachten Ablesungen ohne Correction enthalten. Die Thermometerablesungen dagegen sind bereits mit den nöthigen Correctionen versehen.

- 1) Früher war der Inhalt des Pyknometers gefunden worden:  
 1886: 11,1167 cem bei 18,0°. Wied. Ann. 29. p. 165. 1886.  
 1887: 11,1164 „ „ 17,1° „ „ 34. „ 532. 1888.  
 1887: 11,1164 „ „ 18,05° „ „ „ 542. „

Tabelle V.

1. Gewöhnlicher Schwefelkohlenstoff (Nr. I) Vorversuche.<sup>1)</sup>

Reihenfolge d. Ablesung.	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	18,10°	18,320 cm	4,225 cm	4 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup>
2	18,13	29,215 "	10,120 "	5 22
3	18,14	17,600 "	4,125 "	5 42
4	18,14	17,510 "	4,115 "	5 50
5	18,14	17,820 "	4,180 "	8 36
6	18,13	29,720 "	10,420 "	8 58
7	18,12	17,955 "	4,200 "	9 25
8	18,74	6,460 "	2,475 "	6 57
9	18,74	17,525 "	8,190 "	7 22
10	18,74	6,650 "	2,500 "	7 42
11	18,705	17,400 "	7,940 "	8 20
12	18,67	7,400 "	2,600 "	8 57

am  
folg.  
Tag

## 2. Gewöhnlicher Schwefelkohlenstoff (Nr. I.)

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	4,28°	6,595 cm	1,855 cm	12 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>
2	4,29	7,010 "	1,830 "	1 25
3	4,29	17,080 "	8,160 "	1 40
4	4,29	6,940 "	1,830 "	1 55
5	4,29	18,890 "	9,400 "	2 10
6	4,29	6,750 "	1,830 "	2 25
7	4,29	18,480 "	9,250 "	2 40
8	4,29	6,550 "	1,830 "	2 55

## 3. Sorgfältig gereinigter Schwefelkohlenstoff. (Nr. II.)

Reihenfolge d. Ablesung.	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	17,29°	26,750 cm	2,810 cm	9 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> Morg.
2	18,09	11,870 "	0,690 "	8 15 Ab.
3	18,06	23,040 "	6,480 "	8 30
4	18,05	12,860 "	0,835 "	8 45
5	18,05	24,650 "	7,050 "	9 —
6	18,05	13,025 "	0,855 "	9 15
7	18,05	24,560 "	7,020 "	9 30
8	18,05	12,985 "	0,845 "	9 45
9	18,05	25,280 "	7,405 "	10 —
10	18,05	12,920 "	0,835 "	10 15
11	18,05	12,880 "	0,830 "	10 25
12	18,05	26,225 "	7,925 "	10 40
13	18,05	12,960 "	0,840 "	10 55

1) Bei diesen Vorversuchen wurde das bei den definitiven Versuchen eingeführte Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Ablesungen eines Versuches von einer Viertelstunde noch nicht inne gehalten.

## 4. Sorgfältig gereinigter Schwefelkohlenstoff. (Nr. II).

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	3,12°	9,130 cm	3,155 cm	8 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> Abd.
2	3,15	19,800 "	10,160 "	8 30
3	3,19	8,310 "	3,190 "	8 45
4	3,22	7,640 "	3,225 "	9 0
5	3,24	17,460 "	9,790 "	9 15
6	3,26	6,625 "	3,240 "	9 30
7	3,285	17,680 "	10,500 "	9 45
8	3,30	5,910 "	3,270 "	10 0
9	3,32	17,520 "	10,800 "	10 15
10	3,33	5,400 "	3,290 "	10 30
11	3,355	5,140 "	3,295 "	8 45 } am
12	3,355	17,925 "	11,550 "	9 0 } folg.
13	3,365	4,500 "	3,320 "	9 15 } Tag

## 5. Thiophenfreies Benzol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	17,88°	8,740 cm	4,890 cm	10 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>
2	17,88	8,750 "	4,890 "	10 37
3	17,88	19,620 "	10,420 "	10 52
4	17,88	8,730 "	4,890 "	11 7
5	17,88	20,590 "	10,985 "	11 22
6	17,88	8,500 "	4,850 "	11 37
7	17,89	21,100 "	11,345 "	11 52
8	17,905	8,070 "	4,800 "	12 7

## 6. Thiophenfreies Benzol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	6,12°	5,780 cm	2,105 cm	11 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>
2	6,08	16,350 "	8,200 "	11 58
3	6,07	6,740 "	2,100 "	12 13
4	6,04	18,010 "	8,650 "	12 28
5	6,01	7,720 "	2,100 "	12 43
6	5,82	10,545 "	2,110 "	3 0
7	5,85	20,600 "	8,060 "	8 15
8	5,84	10,930 "	2,110 "	3 30
9	5,83	21,820 "	8,635 "	3 45
10	5,82	11,140 "	2,110 "	4 0

ten. Ich führe diese Versuche auch nur an, um zu zeigen, dass in dem Verhalten von gewöhnlichem und sorgfältig gereinigtem Schwefelkohlenstoff kein nennenswerther Unterschied besteht.

## 7. Aethyläther (über Na destillirt).

Reihenfolge d. Ablebung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	8,00°	7,800 cm	6,020 cm	11 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup>
2	8,00	27,800 "	12,010 "	12 5
3	8,00	7,700 "	6,020 "	12 20
4	8,11	5,310 "	5,945 "	4 30
5	8,13	24,030 "	11,580 "	4 45
6	8,15	4,180 "	5,925 "	5 0
7	8,18	23,430 "	11,680 "	5 20
8	8,19	3,540 "	5,900 "	5 35
9	8,10	4,180 "	5,920 "	6 20
10	8,10	24,500 "	11,780 "	6 35
11	8,10	4,950 "	5,925 "	6 50
12	8,15	4,350 "	5,900 "	10 57 am
13	8,14	23,480 "	11,435 "	11 12 folg.
14	8,13	5,025 "	5,910 "	11 27 Tag

## 8. Methylalkohol.

Reihenfolge d. Ablebung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	18,09°	7,300 cm	1,900 cm	4 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>
2	18,09	23,580 "	8,230 "	4 45
3	18,09	7,270 "	1,900 "	5 0
4	18,09	24,060 "	8,410 "	5 15
5	18,09	7,410 "	1,920 "	5 30
6	18,085	23,840 "	8,275 "	5 45
7	18,08	7,710 "	1,965 "	6 0
8	17,39	20,610 "	3,770 "	am folg. Tag

## 9. Methylalkohol.

Reihenfolge d. Ablebung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	2,65°	5,750 cm	1,990 cm	3 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>
2	2,70	5,600 "	1,990 "	5 0
3	2,71	20,325 "	8,915 "	5 15
4	2,73	5,625 "	1,990 "	5 30
5	2,73	20,540 "	9,035 "	5 45
6	2,73	5,650 "	1,990 "	6 0
7	2,73	20,540 "	9,070 "	6 15
8	2,74	5,480 "	1,990 "	6 30
9	2,745	20,700 "	9,190 "	6 45
10	2,745	5,335 "	1,995 "	7 0

## 10. Aethylalkohol 99,8 Proc.

Reihenfolge d. Ablesung.	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	17,555°	9,940 cm	4 250 cm	5 <sup>h</sup> 3 <sup>m</sup>
2	17,56	20,220 "	8,620 "	5 18
3	17,57	9,850 "	4,200 "	5 33
4	17,58	20,850 "	8,990 "	5 48
5	17,585	9,280 "	4,140 "	6 3
6	17,59	22,500 "	9,750 "	6 19
7	17,595	9,060 "	4,115 "	6 33
8	17,74	6,960 "	3,810 "	8 33
9	17,75	19,62 "	9,210 "	8 53
10	17,765	6,41 "	3,720 "	9 8
11	17,82	13,540 "	4,790 "	4 48
12	17,905	25,255 "	9,655 "	5 3
13	17,29	14,250 "	4,895 "	5 17
14	17,27	14,485 "	4,930 "	5 30
15	17,255	27,650 "	10,435 "	5 45
16	17,240	15,150 "	5,025 "	6 0

am  
folg.  
Tag

## 11. Aethylalkohol 99,8 Proc.

Reihenfolge d. Ablesung.	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	2,07°	8,030 cm	4,880 cm	10 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>
2	2,07	19,510 "	10,630 "	10 55
3	2,07	8,240 "	4,865 "	11 10
4	2,065	8,280 "	4,860 "	11 20
5	2,065	22,810 "	12,185 "	11 35
6	2,065	8,480 "	4,850 "	11 50
7	2,065	8,475 "	4,850 "	11 55
8	2,065	20,760 "	11,050 "	12 10
9	2,065	8,500 "	4,840 "	12 25
10	2,07	9,750 "	4,830 "	2 45
11	2,085	4,000 "	4,820 "	4 47
12	2,080	14,050 "	9,800 "	5 2
13	2,065	4,390 "	4,800 "	5 17
14	2,05	17,820 "	11,480 "	5 32
15	2,035	4,840 "	4,770 "	5 47
16	2,035	17,400 "	11,015 "	6 2
17	2,015	5,300 "	4,740 "	6 17
18	1,55	12,690 "	4,280 "	7 45
19	1,54	24,890 "	10,155 "	8 0
20	1,58	14,10 "	4,185 "	8 15
21	1,34	16,200 "	4,030 "	9 15
22	1,33	27,960 "	9,890 "	9 30
23	1,31	17,080 "	3,970 "	9 45
24	1,295	28,220 "	9,580 "	10 0
25	1,285	17,790 "	3,915 "	10 15

frische Füllung  
2 Tage später

Reihenfolge d. Ablesung.	Temp. des Bades	Stand im Piézom. I	Stand im Piézom. II	Beobach- tungszeit
26	1,77°	9,700 cm	4,465 cm	10 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> am
27	1,77	20,920 "	10,285 "	10 45 folg.
28	1,77	9,420 "	4,480 "	11 0 Tag
29	1,77	9,315 "	4,490 "	11 10
30	1,77	23,070 "	11,610 "	11 25
31	1,78	9,020 "	4,510 "	11 40
32	1,785	8,890 "	4,520 "	11 50
33	1,795	20,535 "	10,590 "	12 5
34	1,805	8,515 "	4,540 "	12 20
35	1,885	7,230 "	4,620 "	5 15
36	1,89	20,900 "	11,610 "	5 30
37	1,895	7,140 "	4,625 "	5 45

## 12. Normaler Propylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piézom. I	Stand im Piézom. II	Beobach- tungszeit
1	17,935°	4,370 cm	2,200 cm	6 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>
2	17,935	17,970 "	8,330 "	6 45
3	17,935	4,720 "	2,250 "	7 0
4	17,86	6,090 "	2,490 "	9 30
5	17,85	18,535 "	8,375 "	9 45
6	17,85	6,530 "	2,565 "	10 0
7	17,85	19,400 "	8,700 "	10 15
8	17,85	6,680 "	2,590 "	10 30
9	17,89	13,720 "	3,760 "	11 0
10	17,40	23,830 "	8,680 "	11 15
11	17,41	13,440 "	3,720 "	11 30
12	17,44	13,140 "	3,670 "	11 48
13	17,45	27,020 "	10,435 "	12 3
14	17,455	12,800 "	3,615 "	12 18
15	17,825	6,700 "	2,630 "	6 32
16	17,825	21,890 "	9,930 "	6 47
17	17,835	6,530 "	2,600 "	7 2

## 13. Normaler Propylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piézom. I	Stand im Piézom. II	Beobach- tungszeit
1	5,27°	11,360 cm	2,410 cm	3 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup>
2	5,57	6,980 "	2,435 "	6 0
3	5,58	18,600 "	9,000 "	6 15
4	5,60	6,550 "	2,430 "	6 30
5	5,62	18,650 "	9,240 "	6 45
6	5,64	6,180 "	2,435 "	7 0
7	5,65	19,050 "	9,675 "	7 15
8	5,66	5,830 "	2,435 "	7 30
9	5,63	6,130 "	2,430 "	9 3
10	5,615	19,030 "	9,370 "	9 18
11	5,60	6,890 "	2,430 "	9 33
12	5,585	20,750 "	9,935 "	9 48
13	5,575	7,545 "	2,425 "	10 3

## 14. Isopropylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	17,85°	5,310 cm	1,640 cm	7 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup>
2	17,83	21,500 "	8,890 "	7 20
3	17,83	5,390 "	1,650 "	7 35
4	17,83	5,280 "	1,635 "	8 15
5	17,83	19,800 "	8,150 "	8 30
6	17,83	5,280 "	1,640 "	8 45
7	17,83	19,930 "	8,250 "	9 0
8	17,835	5,050 "	1,610 "	9 15
9	17,84	19,035 "	7,935 "	9 30
10	17,845	4,780 "	1,560 "	9 45
11	17,70	6,770 "	1,905 "	9 55 { am
12	16,59	26,480 "	4,810 "	12 10 { folg. Tag

## 15. Isopropylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	5,53°	11,200 cm	2,420 cm	5 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>
2	5,545	23,700 "	9,150 "	5 40
3	5,575	10,470 "	2,420 "	5 55
4	5,60	22,430 "	8,925 "	6 10
5	5,62	9,670 "	2,420 "	6 25
6	5,635	22,380 "	9,285 "	6 40
7	5,66	8,910 "	2,420 "	6 55
8	5,805	6,210 "	2,420 "	9 0
9	5,82	18,980 "	9,150 "	9 15
10	5,84	5,760 "	2,420 "	9 30
11	5,86	19,030 "	9,480 "	9 45
12	5,89	5,075 "	2,420 "	10 0
13	5,50	11,820 "	2,405 "	8 45 { am
14	5,50	23,785 "	8,690 "	9 0 { folg.
15	5,50	11,745 "	2,405 "	9 15 { Tag

## 16. Normaler Butylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	17,25°	16,800 cm	2,900 cm	7 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>
2	17,26	27,290 "	8,500 "	7 15
3	17,28	15,925 "	2,745 "	7 30
4	17,37	14,440 "	2,500 "	8 15
5	17,375	26,240 "	8,675 "	8 30
6	17,38	14,230 "	2,460 "	8 45
7	17,39	26,035 "	8,650 "	9 0
8	17,40	13,980 "	2,420 "	9 15
9	17,415	26,950 "	9,210 "	9 30
10	17,42	13,690 "	2,380 "	9 45
11	16,59	26,960 "	4,630 "	9 5 { am
12	17,885	6,620 "	1,160 "	12 35 { folg. Tag

## 17. Normaler Butylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	3,05°	9,160 cm	3,180 cm	7 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup>
2	3,06	9,050 "	3,190 "	8 30
3	3,06	19,650 "	9,580 "	8 45
4	3,06	9,230 "	3,180 "	9 0
5	3,06	21,640 "	10,710 "	9 15
6	3,06	9,330 "	3,170 "	9 30
7	3,06	22,250 "	11,050 "	9 45
8	3,06	9,430 "	3,160 "	10 0
9	3,06	20,390 "	9,800 "	10 20
10	3,06	9,580 "	3,150 "	11 40

## 18. Isobutylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	17,00°	18,340 cm	3,720 cm	8 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>
2	17,945	3,780 "	1,260 "	5 0
3	17,945	17,350 "	7,650 "	5 15
4	17,945	3,910 "	1,270 "	5 30
5	17,945	16,520 "	7,230 "	5 45
6	17,93	4,040 "	1,300 "	6 0
7	17,89	4,500 "	1,380 "	6 30
8	17,88	18,215 "	7,820 "	6 45
9	17,88	4,840 "	1,440 "	7 0
10	17,88	18,490 "	7,890 "	7 15
11	17,88	4,880 "	1,445 "	7 30

## 19. Isobutylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	4,10°	10,550 cm	3,780 cm	4 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup>
2	4,11	21,750 "	10,090 "	5 10
3	4,12	10,350 "	3,770 "	5 25
4	4,125	23,030 "	10,335 "	5 40
5	4,13	10,135 "	3,775 "	5 55
6	4,14	22,820 "	10,850 "	6 10
7	4,15	9,890 "	3,780 "	6 25
8	2,77	28,610 "	2,975 "	1 0 { am folg. Tag



## 20. Gährungs-Amylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	18,025 <sup>0</sup>	3,250 cm	2,905 cm	4 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>
2	18,02	3,325 "	2,920 "	4 50
3	18,02	15,910 "	9,290 "	5 5
4	18,02	3,465 "	2,935 "	5 20
5	18,015	16,220 "	9,420 "	5 35
6	18,01	3,580 "	2,960 "	5 50
7	18,00	14,920 "	8,720 "	6 5
8	17,995	3,745 "	2,995 "	6 20
9	18,035	3,075 "	2,885 "	9 10 { am folg. Tag
10	17,88	4,940 "	3,220 "	10 40
11	17,87	17,100 "	9,290 "	10 55
12	17,86	5,650 "	3,940 "	11 10
13	17,855	18,030 "	9,630 "	11 25
14	17,84	6,035 "	3,425 "	11 40
15	17,42	11,900 "	4,470 "	4 34
16	17,285	13,900 "	4,815 "	5 45
17	17,26	25,790 "	10,810 "	6 0
18	17,25	14,760 "	4,960 "	6 15
19	17,23	14,990 "	5,005 "	6 30
20	17,225	15,125 "	5,030 "	6 40
21	17,21	25,680 "	10,430 "	6 55
22	17,20	15,515 "	5,090 "	7 10

## 21. Gährungs-Amylalkohol.

Reihenfolge d. Ablesung	Temp. des Bades	Stand im Piëzom. I	Stand im Piëzom. II	Beobach- tungszeit
1	3,62 <sup>0</sup>	9,430 cm	2,700 cm	6 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup>
2	3,62	18,730 "	8,395 "	7 8
3	3,63	9,240 "	2,710 "	7 23
4	3,645	9,050 "	2,720 "	9 5
5	3,65	18,715 "	8,535 "	9 20
6	3,65	9,100 "	2,715 "	9 35
7	3,67	20,420 "	9,265 "	9 50
8	3,68	9,050 "	2,710 "	10 5

Anmerkung. Die sehr verschiedene Anzahl von Beobachtungen bei den einzelnen Flüssigkeiten darf nicht befremden: eine grössere Anzahl wurde meistens im Anfang der Untersuchung, als ich noch weniger geübt war, gemacht, und auch dann, wenn die Temperatur nicht genügend regelmässig und langsam sich änderte. Ausserdem musste einige Male eine Versuchsreihe infolge von eingetretenen Störungen unterbrochen werden.

In welcher Weise diese Beobachtungen zur Berechnung der folgenden Tabelle benutzt wurden, soll an einem Beispiel auseinandergesetzt werden. Wählen wir dazu den zweiten Versuch mit „sorgfältig gereinigtem Schwefelkohlenstoff.“ Tabelle V, 3. Das Mittel aus den Ablesungen 4 und 6 vor resp. nach der Compression beträgt bei Piëzometer I 12,943 cm, bei Piëzometer II 0,845 cm; die Ablesung 5 während der Compression ist 24,650 cm resp. 7,050 cm. Bringt man die Calibercorrectionen (vgl. p. 2) an, so erhält man die Werthe 12,992 cm resp. 0,829 cm und 24,639 cm resp. 6,968 cm. Die durch denselben Druck in den Piëzometern erzeugten, auf Normalcaliberraass reducirten Senkungen betragen somit 11,647 cm resp. 6,139 cm. Diese Werthe sind wegen der Compressionswärme (vgl. p. 8) um 0,070 cm resp. 0,010 cm zu vergrössern, und andererseits wegen der hängenbleibenden Flüssigkeitsschicht (vgl. p. 3) um 0,059 cm resp. 0,037 cm zu verkleinern, sodass man schliesslich die Werthe 11,658 cm resp. 6,112 cm erhält. Das Verhältniss beider, 1,907, gibt das Verhältniss der durch denselben Druck erzeugten scheinbaren Volumenverminderungen der in den Piëzometern I und II enthaltenen Flüssigkeiten, Schwefelkohlenstoff und Wasser, an.

Diese Verhältnisszahlen  $\varphi$  sind mit den zugehörigen Temperaturen in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Bezüglich der Temperaturen ist zu bemerken, dass für dieselben die auf halbe Zehntel Grade abgerundeten Badtemperaturen gesetzt wurden.

Tabelle VI.

## 1. Gewöhnlicher Schwefelkohlenstoff. (Nr. I.)

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
18,15°	1,909	4,30	1,599
18,15	1,908	4,30	1,591
18,75	1,921	4,30	1,594
18,70	1,922		
Mittel 18,45	1,915	4,30	1,595

## 2. Sorgfältig gereinigter Schwefelkohlenstoff. (Nr. II.)

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
18,05	1,908	3,15	1,582
18,05	1,907	3,25	1,569
18,05	1,892	3,30	1,568
18,05	1,898	3,30	1,569
18,05	1,906	3,35	1,579
Mittel 18,05	1,901	3,30	1,573

## 3. Thiophenfreies Benzol.

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
17,90	1,953	6,10	1,654
17,90	1,943	6,05	1,646
17,90	1,951	5,85	1,665
		5,85	1,660
Mittel 17,90	1,949	5,95	1,656

## 4. Aethyläther (über Na destillirt).

$t$	$\varphi$
8,00	3,354
8,15	3,369
8,20	3,347
8,10	3,359
8,15	3,352
Mittel 8,10	3,356

## 5. Methylalkohol.

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
18,10	2,565	2,70	2,113
18,10	2,563	2,75	2,103
18,10	2,563	2,75	2,104
		2,75	2,112
Mittel 18,10	2,564	2,75	2,108

## 6. Aethylalkohol. 99,8 Proc.

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
17,55	2,354	2,05	1,956
17,60	2,342	2,05	1,948
17,60	2,349	2,05	1,958
17,75	2,349	2,10	1,949
17,30	2,352	2,05	1,944
17,25	2,341	2,05	1,943
		1,55	1,935
		1,35	1,924
		1,30	1,918
		1,75	1,935
		1,75	1,938
		1,80	1,935
		1,90	1,940
Mittel 17,50	2,348	1,85	1,940

## 7. Normaler Propylalkohol.

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
17,95	2,073	5,60	1,782
17,85	2,065	5,60	1,783
17,85	2,064	5,60	1,780
17,40	2,059	5,60	1,783
17,45	2,050	5,60	1,782
17,85	2,060		
Mittel 17,70	2,062	5,60	1,782

## 8. Isopropylalkohol.

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
17,85	2,203	5,55	1,897
17,85	2,206	5,60	1,885
17,85	2,204	5,65	1,890
17,85	2,199	5,80	1,908
		5,85	1,908
		5,50	1,898
Mittel 17,85	2,203	5,65	1,897

## 9. Normaler Butylalkohol.

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
17,25	1,924	3,05	1,629
17,40	1,918	3,05	1,625
17,40	1,916	3,05	1,626
17,40	1,921	3,05	1,624
Mittel 17,40	1,920	3,05	1,626

## 10. Isobutylalkohol.

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
17,95	2,091	4,10	1,785
17,95	2,089	4,15	1,788
17,90	2,091	4,15	1,787
17,90	2,092		
Mittel 17,95	2,091	4,15	1,787

## 11. Gährungs-Amylalkohol.

$t$	$\varphi$	$t$	$\varphi$
18,00	1,930	3,60	1,635
18,00	1,924	3,65	1,640
18,00	1,925	3,65	1,636
17,85	1,930		
17,85	1,917		
17,25	1,913		
17,20	1,909		
Mittel 17,75	1,921	3,65	1,637

Um aus den unter „*g*“ stehenden Zahlen der obigen Tabelle VI die relativen scheinbaren Compressibilitäten zu erhalten, werden dieselben mit 1,042 multiplicirt; in diesem Verhältniss nämlich ist die durch gleichen Druck in Piëzometer II erzeugte auf Normalcalibermaass reducirte Niveausenkung grösser als in Piëzometer I, wenn beide mit Wasser gefüllt sind.<sup>1)</sup> Eine weitere Multiplication mit der scheinbaren Compressibilität des Wassers, die mit Berücksichtigung der Arbeit von L. Zehnder<sup>2)</sup> einer früheren Untersuchung<sup>3)</sup> zu entnehmen ist, ergibt dann die scheinbare Compressibilität der betreffenden Flüssigkeit; und schliesslich entstehen durch Addition der Deformationsconstanten des Piëzometers, 0,021<sup>4)</sup> die in der folgenden Tabelle VII enthaltenen wirklichen Compressibilitäten  $\mu$ .

Tabelle VII.

Wirkliche Compressibilität für 8 Atmosphären.

Flüssigkeiten	$\mu \cdot 10^6$	bei $t^\circ$	$\mu \cdot 10^6$	bei $t^\circ$	$\frac{\Delta\mu}{\Delta t} 10^6$
Wasser . . . . .	46,2	17,95	—	—	—
Gereinigter Schwefelkohlenstoff . . . . .	89,5	18,05	80,4	3,30	0,615
Thiophenfreies Benzol . . . . .	91,7	17,90	83,0	5,95	0,73
Aethyläther (üb. Na destill.) . . . . .	—	—	163,8	8,10	—
Methylalkohol . . . . .	119,9	18,10	107,5	2,75	0,80
Aethylalkohol 99,8 Proc. . . . .	110,2	17,50	99,7	1,85	0,67
n. Propylalkohol . . . . .	97,0	17,70	89,5	5,60	0,62
Isopropylalkohol . . . . .	103,4	17,85	95,0	5,65	0,69
n. Butylalkohol . . . . .	90,5	17,40	83,3	3,05	0,50
Isobutylalkohol . . . . .	98,3	17,95	90,5	4,15	0,565
Amylalkohol (Gährungs-) . . . . .	90,5	17,75	83,5	3,65	0,495

In der obenstehenden Tabelle ist der Vollständigkeit halber die Compressibilität des Wassers bei 17,95°, von der ich bei der Berechnung der übrigen Werthe ausgegangen bin, mit aufgenommen. In der letzten Columne sind die unter der Annahme, dass die Compressibilität eine lineare Function der Temperatur ist, berechneten Werthe der Aenderung der Compressibilität für 1° angegeben; einige hier

1) Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 33. p. 653. 1888.

2) L. Zehnder, Wied. Ann. 34. p. 91. 1888.

3) Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 33. p. 644. 1888.

4) Ueber die Berechtigung der Wahl dieser nicht direct von uns bestimmten Constante vgl. Wied. Ann. 33. p. 660. 1888 und die neueren Bestimmungen von Amagat, Ann. d. chim. et de phys. 22. p. 95. 1891.

nicht mitgetheilte Versuche und insbesondere die Resultate der folgenden, mit L. Zehnder veröffentlichten Untersuchung ergeben, dass diese Annahme mit Ausnahme für Aethyläther und Wasser sehr nahezu der Wirklichkeit entspricht.

Die Resultate meiner Versuche über Compressibilität finden in der folgenden Arbeit „Ueber den Einfluss des Druckes auf die Brechungsexponenten von Flüssigkeiten“ eine Verwendung; einige sich aus der Tabelle ergebende Beziehungen möchte ich noch hervorheben.

Bei allen Flüssigkeiten mit Ausnahme des Wassers nimmt innerhalb der Versuchstemperaturgrenzen die Compressibilität mit zunehmender Temperatur zu.

Vergleicht man die Compressibilitäten verschiedener normaler Alkohole bei gleicher Temperatur miteinander, so findet man, dass die Compressibilität abnimmt je höher man in die Reihe der Alkohole aufsteigt. Die normalen Alkohole sind compressibeler als die entsprechenden isomeren.

Besonders bemerkenswerth finde ich die grosse Verschiedenheit der Compressibilität der drei Flüssigkeiten gleicher Zusammensetzung: Aethyläther, normaler und Isobutylalkohol. Aus einem Vergleich dieser Werthe mit den beiden für Methyl- und Amylalkohol folgt, dass die Verschiedenheit der Anordnung derselben Atome im Molecül die Compressibilität in viel höherem Maasse beeinflussen kann als eine bedeutende Vermehrung der Masse des Molecüls.

Eine Zusammenstellung meiner Resultate mit denen anderer Beobachter scheint mir nicht nöthig zu sein. Sowohl Amagat<sup>1)</sup> als Pagliano und Palazzo<sup>2)</sup> fanden Werthe, die mit den meinigen zum grössten Theil sehr gut übereinstimmen.

Die Quincke'schen Resultate<sup>3)</sup> dagegen sind fast alle mit sehr grossen Fehlern behaftet; einige derselben weichen um nicht weniger als 45 Proc. ihres Betrages von den obigen Werthen ab.

Würzburg, Phys. Inst. Mai 1891.

1) Amagat, Ann. de chim. et de phys. (5) 11. p. 535. 1877.

2) Pagliano u. Palazzo, Beibl. 9. p. 150. 1885.

3) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 401. 1883.

**II. Ueber den Einfluss des Druckes auf die  
Brechungsexponenten von Wasser, Schwefelkohlen-  
stoff, Benzol, Aethyläther und einigen Alkoholen;  
von W. C. Röntgen und L. Zehnder.**

(Hierzu Taf. I Fig. 3—5.)

Vor ungefähr 3 Jahren veröffentlichte der Eine von uns eine Experimentaluntersuchung über den Einfluss des Druckes auf die Brechungsexponenten des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.<sup>1)</sup> Aus einem Vergleich der Ergebnisse dieser Arbeit mit den von Röntgen und Schneider für Wasser gefundenen Compressibilitätscoëfficienten wurde der Schluss gezogen, dass für Wasser die aus der electromagnetischen Lichttheorie abgeleitete Lorentz'sche Formel,  $(n^2 - 1)/(n^2 + 2) \cdot 1/d = \text{const.}$ , die Beobachtungen nicht, die empirische Formel  $(n - 1)/d = \text{const.}$ <sup>2)</sup> dagegen ziemlich genau darstellt.

Es war von Interesse zu untersuchen, wie andere Flüssigkeiten sich in dieser Beziehung verhalten. Zwar liegt von Hrn. Quincke eine ausführliche Arbeit<sup>3)</sup> über diesen Gegenstand vor, allein die Resultate derselben sind, wie Vorversuche uns lehrten, zum Theil mit so grossen Fehlern behaftet, dass sie zur Beantwortung der Frage, nach welchem Gesetz der Brechungsexponent von Flüssigkeiten durch Druck geändert wird, nicht brauchbar sind. Wir entschlossen uns daher eine grössere Zahl von Flüssigkeiten zu untersuchen und legten bei dieser Arbeit von vornherein das Hauptgewicht auf folgende Punkte: erstens möglichst exacte Resultate zu erzielen und zweitens dieselben Flüssigkeiten, deren Compressibilität bestimmt war, auf ihr optisches Verhalten bei Druckänderungen zu prüfen. Auch bestrebten wir uns, möglichst reine Präparate zu erhalten; indessen müssen wir gestehen, dass wenigstens bei einigen Flüssigkeiten in dieser Beziehung

1) Zehnder, Wied. Ann. 34. p. 91. 1889.

2) Die erste Discussion der Beziehung  $(n - 1)/d = \text{const.}$  finden wir bei Beer (Höhere Optik p. 35), wir wollen dieselbe deshalb der Kürze halber die Beer'sche Formel nennen.

3) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 401. 1883.

die äusserste Grenze nicht erreicht wurde. So haben wir z. B. den von Kahlbaum bezogenen „über Natrium destillirten“ Aethyläther ohne weiteres benutzt, ohne denselben nochmals kurz vor den Versuchen mit aller Sorgfalt zu reinigen. Durch solche Arbeiten wäre unsere ohnehin schon zeitraubende Untersuchung sehr aufgehalten worden, ohne dass dadurch, wie wir glauben, ein wesentlicher Gewinn erreicht worden wäre.

### A) Aenderung des Brechungsexponenten durch Druck.

#### 1. Die Apparate.

Die Beobachtungsmethode ist wiederum im wesentlichen die Jamin'sche; auch konnten wir wieder denselben Interferentialrefractor benutzen, da uns Hr. Prof. Himstedt in Giessen in dankenswerther Weise gestattete das Instrument für unsere Arbeit mit nach Würzburg zu nehmen. Dagegen wurde der Theil des Apparates, in welchem die betreffenden Flüssigkeiten enthalten sind, zweckmässiger construirt. Wir beabsichtigten ursprünglich zu demselben einen massiven Kupferblock zu verwenden, der der Länge nach an zwei Stellen durchbohrt werden sollte und die Flüssigkeiten in diese Durchbohrungen zu bringen, um eine möglichste Gleichheit der Temperaturen in beiden Röhren zu erhalten. Das Durchbohren des Kupferblockes stiess aber bei den gewünschten Dimensionen auf technische Schwierigkeiten, weshalb wir eine Combination von Kupfer und Zink wählten, sodass die beiden Versuchsröhren aus starkwandigen Kupferröhren *aa* Fig. 3 Taf. I bestehen, welche vorher aussen gut verzinkt und dann mit Zink in der Weise umgossen wurden, dass das Ganze einen parallelepipedischen Metallblock *bb* bildet. Die lichte Weite der Röhren beträgt 0,7 cm, die Wandstärke 0,5 cm und die Länge fast genau 40 cm. Dieselben ragen beiderseits um 0,5 cm aus dem Zinkklotz heraus und sind auf den senkrechten Endflächen gut geschliffen, sodass die planparallelen Glasplatten *cc* sich gut schliessend aufkitten lassen. In der Nähe der Enden dieser Röhren sind Messingröhrchen *dd* von 0,3 cm Weite und ca. 18 cm Länge aufgesetzt und zum Theil mit in den Metallblock eingegossen;



dieselben dienen zum Füllen der Röhren und zum Uebertragen des Druckes auf die Flüssigkeiten. Zwei davon sind an ihren Enden mit Schlauchansätzen versehen, die beiden anderen besitzen Ventilabschlüsse *f*, die durch Ueberfangschrauben gedichtet werden.

An drei Stellen *ggg* enthält der Zinkblock verticale, eingegossene und zwischen die Versuchsröhren hineinragende Kupferhülsen zur Aufnahme von Thermometern. Der Raum zwischen Thermometergefäss und Hülse wurde mit Quecksilber ausgefüllt.

Der beschriebene Metallblock bietet gegenüber der früheren Anordnung den grossen Vorthail, dass die Temperatur der Flüssigkeiten in den Röhren sicherer gemessen werden kann, dass Temperaturdifferenzen zwischen verschiedenen Stellen der Röhren nur in kleinem Betrage vorkommen können, und schliesslich, dass die durch Druckänderungen erzeugten Temperaturverschiedenheiten sich rascher ausgleichen.

Um von dem Fehler frei zu werden, der aus einer Durchbiegung der Verschlussplatten infolge der erzeugten Druckänderungen entstehen könnte, wird der Metallblock in einen Trog gelegt, in welchem die gleiche Flüssigkeit wie in den Röhren, aber unter Atmosphärendruck enthalten ist. Dieser aus Messing hergestellte Trog *hh* umschliesst den Block möglichst eng, sodass nur wenig Flüssigkeit zum Ausfüllen des zwischen beiden übrig bleibenden Raumes nöthig ist. Den zwei Paaren planparalleler Glasplatten der Versuchsröhren entsprechend besitzt der Trog beiderseits eine grössere mit einer Planplatte verschlossene Oeffnung. Der Trog wird durch einen kräftigen Messingdeckel mit zahlreichen Schrauben verschlossen, nachdem durch Zwischenlegen eines passend ausgeschnittenen Streifens von Pergamentpapier für die genügende Dichtung gesorgt ist. Den Metallröhren *dd*, sowie den für die Aufnahme von Thermometern bestimmten Löchern entsprechen in den Deckel des Troges eingesetzte Messinghülsen. Der Trog wurde fast bis zum Rande dieser Hülsen gefüllt und letztere dann durch Korkringe abgeschlossen.

Dieser Messingtrog endlich wird in ein Wasserbad, einen 51 cm langen, 21 cm breiten und 28 cm hohen, auf



der Breitseite mit Glaswänden versehenen, gusseisernen Kasten gestellt, und zwar auf consolatartige Stützen, welche dem Wasser so viel Oberfläche darbieten, dass durch dieselben den Versuchsröhren keine merkliche Wärmemenge von den Wänden des Kastens zugeführt werden kann. Auf jeder Schmalseite des Kastens ist ein mit einer Spiegelglasplatte verschlossenes Fenster angebracht, durch welches die beiden Lichtbündel des Interferentialrefractors ein- resp. austreten.

Zum Kitten verwendeten wir für die planparallelen Glasplatten der Versuchsröhren Siegellack bei den Versuchen mit Wasser, Hausenblase bei den Versuchen mit den übrigen Flüssigkeiten. Die Kittungen der Glasplatten des Messingtrogos stehen innen mit den verschiedenen untersuchten Flüssigkeiten, aussen mit dem Wasser des Bades in Berührung; demgemäss wurden diese Platten mit Hausenblase gekittet und die Kittstellen aussen mit Siegellack überzogen. Die Glasplatten der Versuchsröhren mussten wegen der Reinigung der Röhren häufig abgenommen und wieder aufgesetzt werden; bei den anderen Platten war dies nicht nöthig.

Das Wasserbad mit Inhalt stand mittelst vier Steinstützen auf einer grossen, massiven, eingemauerten Steinplatte, auf welcher auch, aber ohne das Bad zu berühren, der Jamin'sche Interferentialrefractor aufgestellt war. Der ganze Apparat war dann noch von einer Holzverschalung umgeben, aus welcher die Röhren *dd*, die Thermometer und das Fernröhrchen des Refractors herausragten.

Um eine während einer Versuchsreihe genügend constant bleibende Temperatur des Bades zu erhalten, war es nöthig die Temperatur des ganzen Beobachtungsraumes ungefähr auf dieselbe Höhe zu bringen und vor jeder Versuchsreihe so lange zu warten, bis sich alle grösseren Temperaturunterschiede in der Nähe des Apparates ausgeglichen hatten. Dadurch wurde die Untersuchung sehr zeitraubend und das Beobachten bei den extremen Temperaturen  $0^{\circ}$  und  $30^{\circ}$  war keine leichte Aufgabe.

Die meisten Beobachtungen wurden mit Natriumlicht (Bunsenbrenner mit Sodaperle) angestellt. Das Licht der ausserhalb der oben erwähnten Holzverschalung stehenden

Flamme ging, bevor es in den Refractor trat, durch eine Fensterglasscheibe und ein 3 cm dickes, mit Alaunlösung gefülltes Glasgefäß, um die ultrarothten Strahlen zurückzuhalten. Die Flamme brannte nur so lange, als zu einer Beobachtung nöthig war.

Ursprünglich beabsichtigten wir alle Beobachtungen mit Sonnenlicht zu machen, um auch den Einfluss des Druckes auf die Dispersion zu erfahren; leider waren wir durch die Ungunst der Witterung, sowie durch die räumlichen Verhältnisse des Instituts gezwungen, diesen Plan aufzugeben, sodass nur einzelne Beobachtungen darüber vorliegen. Bei diesen Versuchen wurde, ähnlich wie es Hr. Quincke gethan hat, das aus dem Refractor austretende Sonnenlicht spectral zerlegt, und die Zahl der Interferenzstreifen, welche infolge von Druckänderungen in den Flüssigkeitsröhren an einzelnen Fraunhofer'schen Linien vorbeigingen, bestimmt. Dabei war es vortheilhaft, einen kleinen Theil der Oeffnung von einer Röhre zu verdecken, sodass das Spectrum aus zwei übereinander liegenden Theilen bestand, von denen der eine Interferenzstreifen, der andere keine enthielt.

Die nöthige Druckdifferenz in den Röhren wurde mit einem Apparat erzeugt, der etwas anders construiert ist, als der frühere, weil es mit Rücksicht auf die zum Theil sehr flüchtigen Flüssigkeiten nicht vortheilhaft ist, bei Drucken unterhalb des Atmosphärendruckes zu beobachten. In Fig. 4 ist der neue Apparat dargestellt. Zwei in Führungen vertical bewegliche, circa 2 cm weite Glasgefäße *aa* sind an einer Schnur befestigt, die über eine mit Bremse versehene Rolle *b* läuft. Dickwandige Gummischläuche verbinden diese Gefäße mit zwei mehrfach gebogenen Glasröhren *cde*, von denen der untere Theil ebenfalls ca. 3 cm weit ist; diese Glasröhren sind durch kurze Kautschukröhrchen mit den Glasröhren *fg* verbunden und letztere in derselben Weise mit den beiden Messingröhrchen *hh* des Versuchsapparates. Von *a* bis *d* sind die Röhren mit Quecksilber, von *d* bis *f* mit Wasser und von *f* bis zur Flüssigkeit in den Versuchsröhren mit Luft gefüllt. Da die Röhren *fg* zum grössten Theil aus Capillarröhren bestehen, so ist nicht zu befürchten, dass eine merkliche Wasserdampfmenge zu den Flüssigkeiten

in  $h$  hinüberdiffundirt. Um ein möglichst kleines Luftvolumen zu erhalten, und um andererseits zu verhindern, dass bei einem eventuellen Abfallen einer Glasplatte von den Versuchsröhren Quecksilber in diese eindringt, wurde die lange Wassersäule zwischen das Quecksilber und die Luft eingeschaltet.

Hinter den Gefässen  $aa$  sind auf der ganzen Länge des massiven Statives, an welchem die beschriebenen Einrichtungen befestigt sind, in Millimeter getheilte Papiermaassstäbe angebracht, ebenso bei  $d$  und auch bei  $f$ ; dieselben sind mehrere Male und bei verschiedenen Temperaturen mit dem Normalmer verglichen. Dass auch bei  $f$  trotz der gleichen Querschnitte bei  $d$  und  $f$  Maassstäbe angebracht sind, war nöthig, weil infolge der dehnbaren Kautschukverbindung beider Röhren, die Niveaus bei  $d$  und  $f$  sich etwas ungleich heben oder senken. Um übrigens die Ausdehnungen der Kautschukschläuche auf ein geringes Maass zu reduciren, waren alle mit Drahtspiralen umgeben. Zur Vermeidung der Parallaxe bei den Ablesungen der Niveaus dienten in bekannter Weise Spiegelstreifen.

An dem Stativ sind in verschiedener Höhe in ganze Grade getheilte Thermometer befestigt zur Messung der Temperatur der Quecksilbersäulen.

Aus der obigen Beschreibung ist nun leicht zu entnehmen, wie in den Versuchsröhren die nöthige Druckdifferenz erzeugt wird. Nach dem Lösen der Bremse wird das eine der Gefässe  $a$  um eine gewisse Strecke gehoben, dann senkt sich das andere um ungefähr ebenso viel; folglich entsteht in der einen Versuchsröhre eine Druckzunahme und in der anderen eine Druckabnahme, deren Beträge durch die erwähnten Maassstäbe gemessen werden. Bei jeder Versuchsreihe ging man von der Mittellage der beiden Quecksilbergefässe aus, liess dann stufenweise den Druck in der einen Versuchsröhre bis zu einem Minimum abnehmen, und darauf bis zu einem Maximum zunehmen, um schliesslich wieder mit der Anfangslage zu endigen.

Die Länge der Kupferröhren, d. h. die Entfernung der inneren Flächen der beiden Verschlussplatten je einer Röhre wurde mit dem Comparator vor jeder Versuchsreihe gemessen

und die Messungen auf Normalmaass reducirt. Erlitten die Versuchsröhren nach der Messung eine Temperaturänderung, so wurde ihre neue Länge aus den Resultaten der Messung und der Temperaturänderung mit Hülfe eines mittleren Ausdehnungscoefficienten 0,0,20 berechnet.

Zur Messung der Temperatur der Versuchsröhren und der darin enthaltenen Flüssigkeit wurden zwei in Zehntelgrade getheilte Thermometer benutzt, deren Gefässe in die oben erwähnten Hülzen des Zinkblockes eingeführt waren. Beide Thermometer sind auf das Sorgfältigste mit dem Normalquecksilberthermometer verglichen.

Eine Fehlerquelle muss noch besonders besprochen werden. Schon bei den ersten Versuchen von Zehnder wurde ein fortwährendes, zum Theil regelmässiges, zum Theil unregelmässiges Wandern der Streifen im Interferentialrefractor beobachtet, das nicht durch Druckdifferenzen in den Röhren entstanden sein konnte. Als Hauptursache von dem langsamen regelmässigen Wandern wurden Differenzen in den Temperaturen der beiden früher voneinander getrennten, aus Glas bestehenden Versuchsröhren erkannt; da diese Differenzen bei dem neuen verbesserten Apparat nur noch sehr gering waren, blieb auch die genannte Erscheinung fast ganz aus. Dagegen kamen im Anfang dieser Untersuchung noch häufig stossweise Verrückungen des Streifensystems vor, die nothwendig beseitigt werden mussten. Um dem Grund dieser Störungen auf die Spur zu kommen, wurden besonders hierauf gerichtete Versuche mit Schwefelkohlenstoff und Benzol angestellt. Dabei ergab sich, dass ein solches stossweises Wandern der Streifen häufig auftrat, wenn in der Nähe des Apparates Erschütterungen stattfanden, wie z. B. durch das Verstellen eines Stuhles auf dem steinernen Boden des Beobachtungszimmers oder durch vorüberfahrende Wagen etc. Aber nur in den Fällen, wo eine einigermaassen beträchtliche Temperaturänderung des Apparates vorausgegangen war, erzeugten die Erschütterungen eine Verschiebung der Streifen. Offenbar waren infolge dieser Temperaturänderungen Spannungen zwischen den sich berührenden ungleichartigen Theilen des Interferentialrefractors entstanden, welche erst durch die Erschütterungen ausgeglichen wurden.

Nachdem die Ursache der Erscheinung gefunden war, war es nicht schwer, dieselbe zu vermeiden. Da die Versuche bei verschiedenen Temperaturen angestellt werden sollten, waren Temperaturänderungen von einem Versuche zum anderen nicht zu umgehen; dagegen wurde das Ziel erreicht, indem jedesmal, bevor eine Versuchsreihe anfang, der Apparat durch kurze, kräftige Schläge gegen die Steinplatte, auf welcher der Apparat stand, erschüttert wurde.

Bei dieser Vorsorge, und wenn die Temperatur des ganzen Beobachtungsraumes, wie bereits oben bemerkt, während eines Versuches möglichst constant gehalten wurde, erhielten wir Beobachtungsreihen, welche in Betreff der Genauigkeit der Uebereinstimmung aller Einzelbeobachtungen untereinander kaum etwas zu wünschen übrig lassen.

Die Regel, nach welcher die Versuche ausgeführt wurden, ist die folgende: Nachdem der Apparat gefüllt und zusammengesetzt war, blieb derselbe sich selbst überlassen, bis eine genügend constant bleibende Temperatur erreicht war. Dann wurde durch Verschieben der Quecksilbergefäße *a* der Durchkreuzungspunkt der Fäden im Beobachtungsfernrohr des Refractors auf die Mitte eines Interferenzstreifens eingestellt, darauf die Natriumflamme verkleinert und die verschiedenen Thermometer abgelesen. Nach einer nochmaligen Einstellung des Interferenzstreifens wurde der Stand der vier Quecksilber- und der zwei Wasserniveaus abgelesen und sodann die Quecksilbergefäße so weit verschoben, dass eine bestimmte Anzahl von Streifen durch das Fadenkreuz ging. Hierauf blieb der Apparat so lange unberührt, bis seit der ersten Einstellung 8 Minuten vergangen waren, und erst dann wurden dieselben Operationen, wie sie soeben beschrieben wurden, wiederholt.

Bzüglich einiger Control- und Hilfsbeobachtungen verweisen wir auf die oben erwähnte Arbeit von Zehnder.

## 2. Resultate.

In den folgenden Tabellen sind der Raumersparniss halber nur die Temperaturgrenzen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  der beiden an den Enden des Troges befindlichen Thermometer und nicht

Tabelle I. Schwefelkohlenstoff;  $m = 20$  Streifen.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$L$	40,088	40,085	40,084	40,084	40,087	40,089	40,088	40,089	40,040	40,044	40,041	40,042	40,045	40,049	40,050
$\rho_1$	5,41	7,94	9,31	9,66	12,51	12,79	13,78	15,96	17,40	18,21	18,40	19,31	22,65	28,30	29,25
	5,16	8,06	9,92	10,16	13,01	13,27	14,13	16,08	17,37	18,56	18,35	19,12	22,84	28,77	29,94
$\rho_2$	5,47	7,93	9,08	9,33	12,48	12,78	13,75	15,88	17,33	18,27	18,38	19,28	22,63	28,32	29,23
	5,22	8,06	9,71	9,93	12,98	13,26	14,10	16,03	17,37	18,55	18,31	19,08	22,83	28,78	29,93
$\rho_m$	5,44	7,93	9,20	9,55	12,50	12,78	13,76	16,04	17,38	18,24	18,37	19,30	22,64	28,31	29,24
$p$	37,35	36,60	35,68	35,30	35,45	17,76	17,59	34,90	34,47	(34,78)	34,23	34,38	33,47	32,23	32,18
	7,14	70	5,77	6,35	58	82	67	77	62	29	16	05	39	21	09
	7,10	28	5,69	6,16	39	71	60	85	61	15	32	04	47	14	22
	7,07	29	6,69	5,63	54	81	59	84	56	41	24	10	40	41	11
	6,98	47	6,24	5,89	54	66	61	93	59	53	48	14	41	30	27
	7,23	48	5,38	6,34	48	76	71	71	44	23	16	10	45	30	07
	7,13	41	6,48	6,21	55	86	59	76	50	44	10	20	48	20	14
	7,18	54	5,83	6,13	42	83	60	94	58	47	20	07	39	29	12
	6,97	38	6,21	6,19	42	63	65	76	50	35	41	20	33	31	17
	6,93	47	6,18	6,57	70	77	62	89	53	31	27	33,99	38	36	24
	7,06	61	6,52	5,82	37	58	61	77	53	35	36	34,32	57	33	26
	6,97	39	6,09	6,25	61	93	59	80	52	39	26	13	51	35	34
	6,97	49	6,97	6,31	57	93	66	76	56	29	30	07	48	35	34
	7,05	36	5,45	6,66	36	62	57	76	51	45	52	15	45	33	15
	6,89	47	6,90	5,98	66	79	66	95	42	38	24	08	48	41	15
	6,95	54	5,81	5,94	67	61	60	76	56	30	17	29	58	39	30
$P_m$	37,06 $\pm 0,04$	36,46 $\pm 0,03$	36,12 $\pm 0,13$	36,16 $\pm 0,07$	35,51 $\pm 0,02$	35,50 $\pm 0,04$	35,24 $\pm 0,02$	34,82 $\pm 0,01$	34,52 $\pm 0,01$	34,38 $\pm 0,03$	34,28 $\pm 0,03$	34,14 $\pm 0,02$	33,46 $\pm 0,02$	32,31 $\pm 0,08$	32,20 $\pm 0,03$

die einzelnen bei jeder Streifeneinstellung abgelesenen Temperaturen angegeben.  $\vartheta_m$  bezeichnet eine dieser Temperaturen, auf welche alle darunter stehenden Werthe von  $p$  reducirt wurden, für welche also auch der Mittelwerth  $p_m$  gilt. Aus demselben Grunde enthalten die Tabellen nicht die Ablesungen der einzelnen Quecksilberstände, sondern die aus denselben berechneten, auf  $0^\circ$  reducirten Druckänderungen in Centimetern Hg ( $p$ ), welche nöthig waren, um  $m$  Streifen durch das Fadenkreuz wandern zu lassen. Unter den Mittelwerthen  $p_m$  stehen die mittleren Fehler dieser Resultate. In der Zeile  $L$  ist die mittlere Länge der Versuchsröhren in Centimetern angegeben, welche der Temperatur  $\vartheta_m$  entspricht. (S. Tab. I p. 32.)

Zu vorstehender Tabelle sind einige Erläuterungen notwendig. Die Resultate stimmen alle sehr gut miteinander überein, obwohl die verschiedenen untersuchten Schwefelkohlenstoffsorten eine sehr verschiedene Reinheit besaßen, und die Versuche zu sehr verschiedenen Zeiten an zwei Orten, zuerst in Giessen, später in Würzburg ausgeführt wurden. So sind die Versuche Nr. 8 und 12 zur Orientirung mit gewöhnlichem käuflichen Schwefelkohlenstoff ausgeführt, welchen der Drogist in Giessen anfänglich nicht verkaufen wollte, weil er durch langes Stehen in einem mangelhaft verschlossenen Gefäß stark gelb geworden war. Zu den übrigen in Giessen ausgeführten Versuchen Nr. 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 14 und 15<sup>1)</sup> wurde ein schon länger als ein Jahr im Institut aufbewahrter Schwefelkohlenstoff verwendet, der von Trommsdorff in Erfurt bezogen war. Die in Würzburg zum Zweck des Anschlusses ausgeführten Versuche Nr. 1 und 2 waren ebenfalls mit gewöhnlichem käuflichem Schwefelkohlenstoff gemacht, und zwar stand bei all diesen Versuchen der Schwefelkohlenstoff noch mit dem den Druck übertragenden Wasser in directer Berührung, was bei allen späteren Versuchen nicht mehr geschah. Zu den Versuchen Nr. 6 und 10 benutzten wir einen Schwefelkohlenstoff, den Hr. Prof. E. Fischer die Güte hatte, für unsere Versuche besonders

1) Ueber diese Versuche wurde schon früher in den Ber. d. Oberh. Ges. f. Natur- u. Heilkunde 26. p. 58. 1888 berichtet.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLIV.



reinigen zu lassen. Um die Reinheit dieses Präparates bis zur wirklichen Ausführung der Beobachtungen zu erhalten, wurde folgendermaassen verfahren: Nachdem die Glasplatten der Versuchsröhren mit Hausenblase neu aufge kittet und getrocknet waren, strömte eine halbe Stunde lang Luft durch die noch warmen Röhren, dann blieben dieselben über Nacht verschlossen stehen. Am folgenden Tage wurden die Röhren zuerst nochmals während einer Stunde mit Luft getrocknet, dann zweimal mit dem reinen Schwefelkohlenstoff ausgespült und erst jetzt damit gefüllt.

Man ersieht schon aus den Werthen der Tabelle, besser aber noch aus der graphischen Darstellung der berechneten Aenderungen der Brechungsexponenten durch den Druck (Fig. 5), dass die verschiedene Reinheit der Substanz keinen merklichen Einfluss auf das Resultat hat. Auch spricht die gute Uebereinstimmung der Resultate von zu so sehr verschiedenen Zeiten gemachten Versuchen sehr zu Gunsten der Zuverlässigkeit unserer Apparate.

In der Tabelle II stehen unter Nr. 1, 3, 4, 5, 6, 8 und 9 die Resultate der mit thiophenfreiem von Kahlbaum in Berlin bezogenem Benzol gemachten Versuche. Die unter Nr. 1 aufgeführten Versuche lieferten stärker voneinander abweichende Werthe als die übrigen, weil die Beobachtungstemperatur dem Gefrierpunkt des Benzols sehr nahe liegt. Die Versuche Nr. 2 und 7 wurden mit einem von Merck in Darmstadt bezogenen aus Benzoësäure hergestellten Benzol ausgeführt. Die damit erhaltenen Werthe passen sehr gut in den Rahmen der übrigen für thiophenfreies Benzol gefundenen Werthe, sodass wir gar keine Abhängigkeit von der Darstellungsart des Benzols erkennen können; während Hr. Quincke für verschiedene Benzolsorten sehr verschiedene Werthe erhielt, die sogar verschieden ausfielen, je nachdem das Benzol in Glasröhren oder in Nickeldröhren, gleich nach dem Einfüllen oder später untersucht wurde.

Die Versuchsreihen Nr. 10 und 11 wurden mit thiophenfreiem Benzol erhalten, während der Trog mit Schwefelkohlenstoff gefüllt war. Diese Versuche wurden gemacht, um die Frage zu entscheiden, ob eine kleine Verschiedenheit der Brechungsexponenten der Flüssigkeit in den Röhren und



Tabelle II. Benzol;  $m = 20$  Streifen.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$L$	40,033	40,034	40,038	40,043	40,043	40,044	40,044	40,047	40,051	40,034	40,044
$\vartheta_1$	5,41 5,53	5,88 6,01	11,65 12,26	17,08 16,95	— —	18,31 18,23	18,44 18,27	22,38 22,36	27,11 27,08	6,37 6,29	18,21 18,33
$\vartheta_2$	5,42 5,51	5,81 6,00	11,61 12,21	17,05 16,94	17,28 17,06	18,42 18,33	18,44 18,29	22,60 22,55	27,11 27,07	6,40 6,30	18,33 18,46
$\vartheta_m$	5,45	5,84	11,63	17,06	17,28	18,37	18,44	22,47	27,10	6,39	18,27
$p$	47,8	48,27	46,58	(45,73)	22,66	44,49	44,38	43,67	41,98	48,07	44,82
	48,6	12	51	5,27	55	85	70	66	2,53	7,91	61
	48,0	28	48	4,89	32	60	56	36	2,12	8,36	66
	48,4	18	60	5,46	30	63	49	77	2,39	8,00	60
	48,5	22	55	5,16	70	76	58	41	2,28	8,29	45,05
	50,3	30	55	5,26	52	57	54	50	1,99	8,05	44,49
	49,4	29	57	4,92	44	59	63	55	2,45	8,10	64
	49,4	19	63	5,09	39	55	62	43	2,16	7,85	82
	(Gefrierpunkt)	34	40	4,83	49	66	55	33	2,01	7,93	53
		30	55	4,99	56	61	70	39	2,19	8,46	76
		38	58	4,73	42	62	51	43	2,18	7,77	87
		17	60	5,10	31	54	59	51	2,25	7,65	86
$p_m$	48,80 $\pm 0,26$	48,26 $\pm 0,02$	46,55 $\pm 0,02$	45,12 $\pm 0,10$	44,94 $\pm 0,06$	44,62 $\pm 0,02$	44,57 $\pm 0,02$	43,50 $\pm 0,04$	42,21 $\pm 0,04$	48,04 $\pm 0,07$	44,68 $\pm 0,03$

im Trog das Resultat merklich beeinflussen kann. Aus einem Vergleich der Ergebnisse dieser Reihen mit den übrigen geht hervor, dass ein derartiger Einfluss nicht zu befürchten ist. Bei den Versuchen mit theuren Flüssigkeiten (Propyl- und Butylalkohol) benutzten wir dieses Resultat, indem wir für den Trog eine Mischung aus Aethyl- und Amylalkohol wählten, deren Brechungsexponent dem der Versuchsflüssigkeit ungefähr gleich war.

Die nächsten Beobachtungen wurden mit über Natrium destillirtem Aethyläther von Kahlbaum ausgeführt.

Tabelle III. Aethyläther,  $m = 20$  Streifen.

Nr.	1	2	3	4	5
$L$	40,032	40,040	40,044	40,044	40,052
$\vartheta_1$ }	3,93 4,16	13,19 12,88	18,61 18,74	18,74 18,77	23,35 23,15
$\vartheta_2$ }	3,97 4,16	13,23 12,89	18,66 18,79	18,81 18,86	23,43 23,22
$\vartheta_m$	3,95	13,21	18,64	18,78	23,39
$p$ }	37,72	34,81	32,89	16,65	29,95
	81	83	70	46	29,89
	74	61	89	28	30,12
	75	69	92	27	30,20
	79	77	83	39	29,89
	74	72	77	55	29,86
	79	56	90	40	29,90
	66	70	97	47	29,88
	61	77	88	40	30,01
	77	71	33,09	54	29,88
	71	66	32,82	40	29,93
	64	67	89	47	29,97
$p_m$	37,73 $\pm 0,02$	34,71 $\pm 0,02$	32,88 $\pm 0,03$	32,86 $\pm 0,06$	29,96 $\pm 0,03$

Von allen untersuchten Flüssigkeiten ist es der Aethyläther, dessen Brechungsexponent am stärksten durch den Druck beeinflusst wird.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate für die verschiedenen von Kahlbaum bezogenen Alkohole.

**Tabelle IV. Alkohole,  $m = 16$  Streifen.**

Methylalkohol						Aethylalkohol 99,8 Proc.				Normal-Propylalkohol			
Nr.	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4
$L$	40,037	40,044	40,044	40,049	40,052	40,035	40,043	40,044	40,052	40,035	40,044	40,044	40,051
$\vartheta_1$	10,34	18,13	18,17	25,03	29,18	7,89	18,04	18,19	28,80	7,69	18,33	18,75	27,79
	—	18,15	18,21	25,16	29,40	7,97	18,00	18,05	28,90	7,71	18,61	18,79	28,04
$\vartheta_2$	10,37	18,20	18,24	25,12	29,23	7,85	18,04	18,20	28,83	7,70	18,37	18,79	27,84
	10,27	18,23	18,27	25,28	29,48	7,93	18,00	18,04	28,91	7,72	18,62	18,84	28,05
$\vartheta_m$	10,36	18,18	18,23	25,09	29,21	7,87	18,02	18,20	28,82	7,70	18,35	18,78	27,82
$p$	45,53	43,33	21,68	41,85	40,93	45,43	21,38	42,66	40,21	48,02	45,30	22,74	43,10
	53	63	76	81	91	24	31	80	25	8	30	39	3,30
	52	31	69	85	67	25	38	67	05	3	45	62	3,19
	50	44	77	93	73	33	29	80	12	7	44	63	3,90
	57	42	67	79	83	33	38	60	26	6	30	46	3,17
	48	41	67	82	97	29	42	72	15	2	33	66	3,18
	47	57	68	87	64	50	42	78	25	47,98	54	77	2,92
	54	59	72	85	31	04	41	76	14	48,04	39	43	3,06
	40	33	80	70	41,02	33	32	65	06	8	25	73	3,15
	30	57	73	89	40,99	27	39	63	10	5	38	57	3,83
	54	47	74	75	64	25	41	65	12	2	34	78	2,92
$p_m$	56	47	76	82	43	35	36	86	26	1	53	58	2,90
	45,50 $\pm 0,02$	43,46 $\pm 0,03$	43,44 $\pm 0,03$	41,83 $\pm 0,02$	40,76 $\pm 0,05$	45,30 $\pm 0,03$	42,75 $\pm 0,03$	42,72 $\pm 0,02$	40,17 $\pm 0,02$	48,03 $\pm 0,01$	45,38 $\pm 0,02$	45,23 $\pm 0,05$	43,13 $\pm 0,05$

Tabelle IV. Alkohole,  $m=16$  Streifen. (Fortsetzung.)

Nr.	Normal-Butylalkohol				Isopropylalkohol				Isobutylalkohol				Amylalkohol			
	1	2	3		1	2	3	4	1	2	3		1	2	3	4
$L$	40,084	40,044	40,053		40,036	40,043	40,044	40,053	40,032	40,044	40,052		40,033	40,043	40,043	40,052
$\rho_1$	6,04	18,27	30,50		8,15	18,04	18,15	29,72	3,92	18,92	28,91		5,27	17,80	18,13	29,26
	—	18,71	30,77		8,31	18,14	18,25	29,79	3,93	19,12	29,82		5,48	17,72	17,85	28,91
$\rho_2$	6,01	18,30	30,52		8,20	18,07	18,22	29,76	3,86	18,97	28,95		5,19	17,84	18,10	29,30
	6,47	18,84	30,78		8,33	18,20	18,32	29,84	3,88	19,16	29,87		5,40	17,74	17,85	28,98
$\rho_m$	6,02	18,29	30,51		8,18	18,06	18,19	29,74	3,90	18,95	28,93		5,23	17,82	18,11	29,28
$p$	49,81	46,59	43,81		45,97	43,39	21,59	40,51	46,90	43,20	40,87		48,75	22,90	45,67	43,19
	53	65	34		6,01	21	66	38	6,59	31	93		78	78	64	01
	77	60	44,05		6,02	31	59	19	7,13	27	95		73	73	84	39
	88	74	43,88		5,97	34	57	57	6,88	35	98		88	81	72	05
	65	46	70		6,07	38	62	18	6,35	29	89		82	77	66	21
	64	71	73		5,97	29	67	35	6,90	17	97		79	79	73	23
	73	64	82		6,07	35	62	27	6,74	28	90		84	80	65	42,94
	69	72	71		5,94	30	69	40	6,99	24	87		78	92	68	43,04
	52	70	92		6,08	31	70	25	7,06	37	98		84	87	70	07
	63	66	44,07		6,25	38	68	28	6,65	18	41,00		75	93	63	23
	74	70	43,42		5,86	32	61	33	un-	57	40,90		86	86	75	42,88
	67	80	98		5,99	30	70	31	dit!	20	91		87	79	61	42,90
$P_m$	49,69 $\pm 0,03$	46,66 $\pm 0,02$	43,79 $\pm 0,04$		46,02 $\pm 0,02$	43,32 $\pm 0,01$	43,90 $\pm 0,03$	40,34 $\pm 0,03$	46,87 $\pm 0,04$	43,29 $\pm 0,02$	40,93 $\pm 0,01$		48,82 $\pm 0,01$	45,66 $\pm 0,04$	45,69 $\pm 0,02$	43,09 $\pm 0,05$

Von allen oben mitgetheilten Beobachtungsreihen zeigt die Nr. 1 mit Normalpropylalkohol die beste Uebereinstimmung der einzelnen Werthe untereinander; die grösste dort vorkommende Abweichung eines Werthes von  $p$  vom Mittelwerthe  $p_m$  entspricht einem Fehler in der Einstellung des Fadenkreuzes von ca.  $\frac{1}{60}$  Streifenbreite. Die schlechteste Uebereinstimmung findet man in den Versuchen beim Gefrierpunkt des Benzols, wo die Abweichung einem Einstellungsfehler von einer halben Streifenbreite entspricht. Im allgemeinen kann man sagen, dass die Versuche bei den extremen Temperaturen eine schlechtere Uebereinstimmung aufweisen als die anderen; ein Resultat, das in Anbetracht von dem, was oben über die Art der Herstellung dieser Temperaturen gesagt wurde, nicht befremden wird.

Die Versuche mit Sonnenlicht sind wie oben bereits bemerkt, infolge ungünstiger Lichtverhältnisse sehr unvollständig geblieben; wir mussten uns mit den wenigen noch in Giessen erhaltenen Versuchen begnügen. Die Genauig-

Tabelle V. Wasser. *B. D. F.*-Linien.  $L = 40,041$  cm.

Nr.	<i>B</i>				<i>D</i>	<i>F</i>			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>m</i>	8	10	10	8	10	8	10	10	8
$\vartheta_1$	17,56	18,41	18,41	18,56	18,41	17,56	18,41	18,41	18,51
	17,61	18,41	18,41	18,51	18,41	17,56	18,41	18,41	18,56
$\vartheta_2$	17,56	18,36	18,37	18,48	18,37	17,53	18,36	18,37	18,46
	17,58	18,36	18,37	18,43	18,37	17,53	18,36	18,37	18,55
$\vartheta_m$	17,60	18,39	18,39	18,49	18,39	17,54	18,39	18,39	18,50
<i>p</i>	68,2	86,9	85,7	69,1	72,1	48,2	60,1	59,1	47,0
	68,9	87,4	85,6	70,1	73,7	48,3	60,5	59,2	49,2
	69,3	85,2	86,1	69,0	73,3	48,1	59,6	59,9	48,8
	70,4	86,0	86,2	67,9	73,1	47,9	59,8	60,4	49,0
	67,9			68,1		47,8			48,1
	68,8			69,4		48,6			47,6
	69,4			68,7		47,5			48,4
	66,9			69,1		48,0			47,4
						47,3			48,0
						47,4			48,8
						47,6			46,4
						47,7			48,0
$p_m$	68,72	86,98	85,90	68,93	73,05	47,87	60,00	59,65	48,06

keit jener Versuche steht wegen dieser Verhältnisse und der Anwendung eines nicht ganz zweckentsprechenden Spectroskops gegen die der Versuche mit Natriumlicht weit zurück. Indessen haben die Resultate doch einen Werth, weil man aus denselben mit Sicherheit entnehmen kann, in welchem Sinn die Dispersion des Wassers und des Schwefelkohlenstoffs durch Druck geändert wird.

In der Tabelle V und VI sind die Resultate dieser Beobachtungen enthalten. In Anbetracht der meistens geringen Zahl von Versuchen sind die Werthe der mittleren Fehler der Resultate nicht berechnet.

Tabelle VI. Schwefelkohlenstoff. *B. D. F.*-Linien.  
 $L = 40,038$  cm;  $m = 20$  Streifen.

Nr.	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
	1	2	3
$\vartheta_1$	14,91	15,03	15,00
	15,00	15,04	15,03
$\vartheta_2$	14,86	14,98	14,93
	14,93	14,98	14,98
$\vartheta_m$	14,92	15,01	14,98
$p$	41,6	34,6	27,5
	42,2	34,9	27,2
	41,7		27,6
	41,5		27,1
$p_m$	41,75	34,75	27,35

In der Tabelle VII sind alle Resultate  $p_m$  für Natriumlicht nach Reduction auf  $45^\circ$  Breite und Meereshöhe, und nach Anbringung einer kleinen Correction wegen der stattgefundenen Veränderung der Maassstäbe am Druckapparat mit den zugehörigen Temperaturen  $\vartheta_m$  zusammengestellt. Daneben stehen die Werthe der Aenderung des Brechungs-exponenten  $n_1 - n$  durch den Druck einer Atmosphäre, berechnet nach der Formel  $n_1 - n = (76 \cdot m \cdot \lambda) / (p \cdot L)$ , in welcher für  $\lambda$  die von Hrn. Rowland gefundenen Wellenlängen im luftleeren Raum benutzt wurden; nämlich:

$$\lambda \text{ der } B\text{-Gruppe} = 68,76 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

$$\lambda \text{ der } D\text{-Gruppe} = 58,95 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

$$\lambda \text{ der } F\text{-Linie} = 48,63 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

Die hinter den Werthen von  $n_1 - n$  stehenden Zahlen bedeuten die mittleren Fehler von  $n_1 - n$  unter der Voraussetzung, dass alle zur Berechnung von  $n_1 - n$  benutzten Werthe mit Ausnahme der Drucke  $p$  fehlerfrei sind.

Die Werthe für Wasser sind der früheren Arbeit von Zehnder<sup>1)</sup> entnommen und der Vollständigkeit halber hier mit aufgeführt.

Tabelle VII.

## Natriumlicht.

Wasser.			Schwefelkohlenstoff.		
$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$	$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
-0,78°	44,61 cm	16,91 $\pm$ 0,01	5,44°	37,06 cm	60,39 $\pm$ 0,06
+0,06	44,20 "	16,87 3	7,93	36,47 "	61,35 5
0,42	44,44 "	16,78 2	9,20	36,14 "	61,93 22
1,05	45,21 "	16,68 1	9,55	36,18 "	61,90 10
2,62	45,69 "	16,51 1	12,50	35,53 "	63,01 3
2,67	45,65 "	16,52 2	12,78	35,51 "	63,03 8
2,92	45,76 "	16,48 2	13,76	35,26 "	63,47 3
3,10	45,89 "	16,44 2	16,04	34,84 "	64,24 2
4,95	46,39 "	16,26 2	17,38	34,53 "	64,80 2
8,95	47,52 "	15,87 2	18,24	34,38 "	65,08 6
9,00	47,40 "	15,91 2	18,37	34,28 "	65,28 6
13,05	48,47 "	15,56 3	19,30	34,16 "	65,51 5
13,28	48,45 "	15,56 2	22,64	33,48 "	66,83 4
17,83	49,42 "	15,26 1	28,31	32,33 "	69,21 6
18,01	49,43 "	15,26 1	29,24	32,22 "	69,43 5
18,03	49,45 "	15,25 1			
23,27	50,36 "	14,97 2			

Benzol.			Aethyläther.		
$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$	$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
5,45°	48,81 cm	45,85 $\pm$ 0,25 *)	3,95°	37,74 cm	59,31 $\pm$ 0,03
5,84	48,27 "	46,36 2	13,21	34,72 "	64,45 4
11,63	46,56 "	48,06 2	18,64	32,89 "	68,03 6
17,06	45,13 "	49,57 11	18,78	32,87 "	68,07 13
17,28	44,95 "	49,78 3	28,39	29,97 "	74,65 8
18,37	44,64 "	50,13 3			
18,44	44,58 "	50,20 2			
22,47	43,51 "	51,42 5			
27,10	42,22 "	52,98 5			

1) Zehnder, Wied. Ann. 34. p. 91. 1888.

2) Unsicher wegen der Nähe des Gefrierpunktes.



## Methylalkohol.

$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
10,36°	45,51 cm	39,34 ± 0,02
18,18	43,47 "	41,18 3
18,23	43,45 "	41,19 3
25,09	41,84 "	42,78 2
29,21	40,77 "	43,90 6

## Aethylalkohol 99,8 Proc.

$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
7,87°	45,31 cm	39,52 ± 0,02
18,02	42,76 "	41,86 3
18,20	42,73 "	41,89 2
28,82	40,18 "	44,55 2

## Propylalkohol.

$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
7,70°	48,04 cm	37,27 ± 0,01
18,35	45,39 "	39,44 2
18,78	45,24 "	39,57 5
27,82	43,14 "	41,48 4

## Isopropylalkohol.

$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
8,18°	46,03 cm	38,89 ± 0,01
18,06	43,33 "	41,32 1
18,19	43,31 "	41,33 3
29,74	40,35 "	44,36 3

## Butylalkohol.

$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
6,02°	49,71 cm	36,02 ± 0,02
18,29	46,67 "	38,35 2
30,51	43,80 "	40,87 4

## Isobutylalkohol.

$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
3,90°	46,88 cm	38,19 ± 0,03
18,35	43,30 "	41,34 2
28,93	40,94 "	43,72 1

## Amylalkohol.

$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
5,23°	48,83 cm	36,67 ± 0,01
17,82	45,67 "	39,19 3
18,11	45,70 "	39,17 2
29,28	43,10 "	41,52 4

Die Werthe der Aenderung des Brechungsexponenten durch den Druck einer Atmosphäre,  $(n_1 - n) 10^6$ , sind in der Fig. 5, Taf. I als Ordinaten mit den zugehörigen Temperaturen als Abscissen eingetragen. Alle Curven kehren ihre convexe Seite gegen die Abscissenaxe; die Curven für Wasser und Aether sind am stärksten convex, die übrigen verlaufen fast geradlinig, sodass für die betreffenden Flüssigkeiten die Aenderung des Brechungsexponenten pro Atmosphäre nahezu als eine lineare Function der Temperatur betrachtet werden kann.<sup>1)</sup>

1) Der Werth für Isobutylalkohol bei 3,90° ist als unsicher wegen der gegen Ende der Beobachtungen gefundenen Undichtigkeit des Apparates nicht mit eingetragen; ebenso fehlt in der Figur der Werth für Benzol bei 5,45°, weil wahrscheinlich ein Theil des Benzols fest war.

Zum Nachweis der Aenderung der Dispersion von Wasser und Schwefelkohlenstoff haben wir die Resultate der entsprechenden Beobachtungen in der folgenden Tabelle VIII in gleicher Weise wie in Tabelle VII zusammengestellt.

Tabelle VIII. Sonnenlicht.

Wasser.				Schwefelkohlenstoff.			
Licht-art	$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$	Licht-art	$\vartheta_m$	$p_m$	$(n_1 - n) 10^6$
B	17,60°	68,72 cm	15,19	B	14,92°	41,95 cm	62,2
	18,39	86,14 "	15,12	D	15,01	Interp. aus Tab. VII	63,9
	18,49	68,93 "	15,22				
D	18,39	Interp. aus Tab. VII	15,23	F	14,98	27,35 cm	67,4
F	17,54°	47,87 cm	15,43				
	18,39	59,83 "	15,43				
	18,50	48,06 "	15,36				

Aus diesen Beobachtungen geht mit Sicherheit hervor, dass die Dispersion  $n_f - n_b$  beider Flüssigkeiten durch Druck vergrößert wird; ob auch die „dispargirende Kraft“  $(n_f - n_b)/(n_b - 1)$  sich geändert hat, ist eine Frage, zu deren definitive Beantwortung die Genauigkeit der Versuche nicht ausreichend ist.

Zum Schluss möchten wir noch einige ergänzende Beobachtungen mittheilen.

Um zu prüfen, ob die von Hrn. Quincke insbesondere bei Aethyläther beobachtete Abhängigkeit der durch die Druckeinheit erzeugten Aenderung des Brechungsexponenten vom Druck in der That in nachweisbarem Betrage vorhanden ist, wurden mit verschiedenen Flüssigkeiten Versuche mit nur einer Röhre ausgeführt. Es ist nämlich leicht einzusehen, dass bei den beschriebenen Versuchen mit zwei Röhren ein derartiger Einfluss des Druckes sich nicht bemerkbar zu machen braucht, dass dagegen bei Anwendung nur einer Röhre eine solche Abhängigkeit gefunden werden müsste.

Die Resultate dieser Versuche sind in den obigen Tabellen mit enthalten. Die darauf bezüglichen Werthe von  $p$  sind halb so gross als die anderen, da nur die halbe Anzahl von Streifen das Fadenkreuz passirte; der besseren Vergleichung wegen sind aber die Mittelwerthe aus diesen Drucken,

sammt ihren Fehlern mit zwei multiplicirt unter  $p_m$  in den Tabellen I bis IV aufgenommen.

In der folgenden Tab. IX sind alle Beobachtungen mit einer Röhre nochmals zusammengestellt.

Tabelle IX.

Substanz	Schwefelkohlenstoff	Benzol	Aethyläther	Methylalkoh.
$\vartheta_m$	13,76°	12,78°	17,28°	18,78°
	17,60 cm	17,76 cm	22,66 cm	16,65 cm
	66 "	82 "	55 "	46 "
	57 "	71 "	32 "	26 "
$p$	66 "	81 "	30 "	28 "
Kleinere	59 "	66 "	70 "	27 "
Drucke	61 "	76 "	52 "	39 "
	62 "	86 "		55 "
	65 "	63 "		46 "
Mittel	17,62 "	17,78 "	22,51 "	16,42 "
	17,60 cm	17,63 cm	22,44 cm	16,40 cm
	59 "	77 "	39 "	47 "
	71 "	58 "	49 "	40 "
$p$	61 "	93 "	56 "	52 "
Grössere	59 "	93 "	42 "	54 "
Drucke	60 "	62 "	31 "	40 "
	67 "	79 "		47 "
	59 "	61 "		39 "
Mittel	17,62 "	17,73 "	22,44 "	16,45 "

Substanz	Aethylalkohol	Norm. Propylalk.	Isopropylalk.	Amylalkohol
$\vartheta_m$	18,02°	18,78°	18,19°	17,82°
	21,38 cm	22,74 cm	21,59 cm	22,90 cm
	31 "	39 "	66 "	78 "
$p$	38 "	62 "	59 "	73 "
Kleinere	29 "	63 "	57 "	81 "
Drucke	38 "	46 "	62 "	77 "
	42 "	66 "	67 "	79 "
Mittel	21,36 "	22,58 "	21,62 "	22,79 "
	21,42 cm	22,77 cm	21,62 cm	22,80 cm
	41 "	43 "	69 "	92 "
$p$	32 "	73 "	70 "	87 "
Grössere	39 "	57 "	68 "	86 "
Drucke	41 "	78 "	61 "	93 "
	36 "	58 "	70 "	79 "
Mittel	21,38 "	22,64 "	21,67 "	22,86 "

Die Werthe von  $p$  sind in je zwei Gruppen getheilt; in der ersteren befinden sich die bei kleineren, in der zweiten die bei grösseren Drucken erhaltenen Werthe. Alle in einer Columnne stehenden Werthe von  $p$  gehören zu einer fortlaufenden Beobachtungsreihe, die in der früher beschriebenen Weise erhalten wurde. Vergleicht man die Mittelwerthe der ersteren mit denen der zweiten Gruppe, so erkennt man, dass das Verhältniss der Streifenverschiebung zu den dazu nöthigen Druckänderungen innerhalb unserer Druckgrenzen constant ist; denn es dürfte gewagt erscheinen, aus den kleinen Abweichungen von dieser Regel auf die Ungültigkeit derselben zu schliessen. Jedenfalls ist der Schluss, zu dem man bei Betrachtung der Quincke'schen Versuche mit Aethyläther kommen könnte, dass nämlich innerhalb derselben Druckgrenzen, wie wir sie anwandten, das genannte Verhältniss bis zu 30 Proc. mit dem Druck variirt, ganz und gar falsch. —

Eine Versuchsreihe mit Wasser in der Nähe von  $0^0$  und Natriumlicht wurde noch ausgeführt, weil die früheren Versuche von Zehnder mit Glasröhren bezüglich der Bestimmung der Temperaturen, namentlich der tieferen, nicht völlig sicher erschienen. Wir erhielten mit destillirtem, vorher ausgekochtem Wasser folgende Reihe.

Tabelle X. Wasser.  $m = 7$  Streifen,  $L = 40,029$  cm.

$\delta_1 =$	$\begin{cases} 0,01 \\ - \end{cases}$							
$\delta_2 =$	$\begin{cases} 0,01 \\ 0,03 \end{cases}$							
$\delta_m =$	0,02							
$p =$	46,72	46,84	46,83	47,05	46,73 47,01	46,61 46,93	46,69 46,68	46,64 46,71 cm
$p_m =$	46,79 $\pm$ 0,04 cm.							

Berechnet man aus dieser Tabelle den Werth  $(n_1 - n)10^6$  für Wasser von  $0,02^0$ , so findet man:  $16,74 \pm 0,01$ , während durch Interpolation aus den früheren Versuchen für diese Temperatur sich 16,81 ergibt. Folglich ist diese Temperatur in der That seiner Zeit mit dem noch ziemlich primitiven Apparat nicht genau genug bestimmt worden, indessen ist der begangene Fehler, wie man sieht, klein.

Die bisher mitgetheilten optischen Beobachtungen wurden von L. Zehnder ausgeführt.

### B) Brechungsexponenten.

Brechungsexponent einer Substanz für eine bestimmte Lichtart sei der Werth des Verhältnisses  $\sin i / \sin r$  beim Uebergang des Lichtes aus dem luftleeren Raum in die betreffende Substanz. Von den in dem vorhergehenden Abschnitte erwähnten Flüssigkeiten wurde der Brechungsexponent für Natriumlicht (Mitte der beiden Na-Linien) mit Hülfe eines ausgezeichneten Brunner'schen Goniometers, dessen mit vier Nonien versehener Theilkreis Ablesungen bis auf 3 Sec. gestattet, und eines Steinheil'schen Flüssigkeitsprismas bestimmt. Bezüglich des letzteren ist zu erwähnen, dass das ältere, in der hiesigen Sammlung vorhandene Prisma wegen mangelhaftem Planparallelismus der angesprengten Verschlussplatten unbrauchbar war, und dass ein zweites, erst nachdem es wegen desselben Fehlers Hr. Steinheil zurückgesandt und von ihm verbessert war, den Anforderungen, die beim Gebrauch eines so guten Goniometers zu stellen sind, genügte. Die Durchbohrung dieses zweiten Prismas ist 2,7 cm weit; mittelst eines gut schliessenden Korkes ist ein in  $1/8^\circ$  getheiltes Thermometer eingesetzt, welches vorher mit dem Normalquecksilberthermometer verglichen war. Die Verschlussplatten mussten während der Untersuchung nur einmal abgenommen und neu aufgesetzt werden.

Der brechende Winkel des Prismas wurde dreimal, vor, während und am Schlusse der Untersuchung mit Hülfe eines Gauss'schen Oculares bestimmt; die drei resp. Werthe sind:

$59^\circ 41' 15''$ ;  $59^\circ 41' 16''$ ;  $59^\circ 41' 14''$

bei Temperaturen, die zwischen  $17^\circ$  und  $19^\circ$  liegen.

Das in bekannter Weise sorgfältig justirte Goniometer stand in einem grossen Beobachtungsraume, dessen Temperatur sich nur wenig und regelmässig änderte; die Flamme des Bunsen'schen Brenners brannte nie länger als zur Einstellung des Fernrohres auf die Doppellinie nöthig war, der Beobachter verweilte möglichst kurze Zeit in dem Raume

und die definitive Einstellung des Prismas auf das Minimum der Ablenkung fand erst statt, nachdem das frisch gefüllte Prisma in ungefähr richtiger Stellung während einiger Stunden auf dem Prismentische gestanden hatte. Auch wurde nach jeder Drehung des Prismentisches eine Zeit lang gewartet, bis das Fernrohr auf die Doppellinie definitiv eingestellt wurde. Diese Vorsichtsmaassregeln sind nöthig, wenn die Flüssigkeit im Glaskörper des Prismas überall gleiche Temperatur haben und ein vollständig scharfes Spaltbild erhalten werden soll.

Der Ablenkungswinkel wurde aus vier Stellungen des Fernrohres bestimmt, indem dasselbe einmal links, dann zweimal rechts und schliesslich wiederum links von der Richtung des nicht abgelenkten Lichtes eingestellt wurde. Zu jeder Einstellung wurde die Temperatur der Flüssigkeit gemessen; die grösste während der vier Einstellungen vorkommende Aenderung betrug  $0,1^{\circ}$ .

Dass stets frische, dem Vorrath entnommene Flüssigkeiten benutzt wurden, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

In der folgenden Tabelle sind diese Einstellungen, die daraus abgeleiteten Winkel der minimalen Ablenkung und die Temperaturen enthalten, und zwar ist der Kürze halber unter der Einstellung das Mittel aus je zwei Einstellungen auf derselben Seite angegeben; ebenso ist unter Temperatur das auf  $0,05^{\circ}$  abgerundete Mittel der vier beobachteten Temperaturen zu verstehen.

Tabelle XI.

Flüssigkeiten	Einstellung		Ablenkungs- winkel	Temp.
	links	rechts		
Wasser . . . . .	$154^{\circ}58'19''$	$108^{\circ}6'42''$	$23^{\circ}45'49''$	$19,40^{\circ}$
Gerein. Schwefelkohlenstoff	$180\ 11\ 37$	$82\ 53\ 23$	$48\ 39\ 7$	$18,10$
	$180\ 11\ 54$	$82\ 53\ 6$	$48\ 39\ 24$	$18,05$
Benzol a. Benzoesäure . .	$168\ 38\ 32$	$94\ 26\ 28$	$37\ 6\ 2$	$17,90$
Thiophenfreies Benzol . .	$168\ 37\ 42$	$94\ 27\ 17$	$37\ 5\ 13$	$18,10$
Aethyläther (über Na dest.)	$156\ 35\ 51$	$106\ 29\ 0$	$25\ 3\ 26$	$16,85$
Methylalkohol . . . . .	$154\ 42\ 25$	$108\ 22\ 32$	$23\ 9\ 57$	$17,60$
Aethylalkohol 99,8 Proc. {	$157\ 9\ 45$	$105\ 55\ 14$	$25\ 37\ 16$	$19,55$
	$157\ 10\ 40$	$105\ 54\ 10$	$25\ 38\ 15$	$19,05$
n. Propylalkohol . . . . .	$159\ 5\ 50$	$103\ 59\ 4$	$27\ 33\ 23$	$17,60$
Isopropylalkohol . . . . .	$158\ 38\ 30$	$104\ 31\ 28$	$27\ 1\ 1$	$17,45$
n. Butylalkohol . . . . .	$160\ 12\ 25$	$102\ 52\ 27$	$28\ 39\ 59$	$17,50$
Isobutylalkohol . . . . .	$159\ 54\ 45$	$103\ 10\ 20$	$28\ 22\ 13$	$18,10$
Amylalkohol (Gährungs-) .	$160\ 51\ 38$	$102\ 13\ 27$	$29\ 19\ 6$	$17,60$

Mit Schwefelkohlenstoff und Aethylalkohol sind je zwei Bestimmungen jedesmal an zwei aufeinander folgenden Tagen gemacht; das mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllte Prisma war von einem Tag bis zum folgenden auf dem Prismentisch stehen geblieben. Aus der guten Uebereinstimmung der an zwei verschiedenen Tagen gefundenen Werthe ist zu schliessen, dass das Prisma durch den Kork in genügender Weise verschlossen war.

Für die Einstellung des Fernrohrs auf das nicht abgelenkte Licht erhielten wir  $131^{\circ} 32' 28''$  und ein zweites mal  $131^{\circ} 32' 30''$ .

Aus den Würzburger meteorologischen Beobachtungen ergibt sich, dass der Barometerstand an den Tagen, wo die obigen Messungen ausgeführt wurden, wenig um den Mittelwerth 74,5 schwankte; die Temperatur im Beobachtungsraum war stets wenig von  $18^{\circ}$  verschieden, sodass wir als Brechungsexponent der Luft den Werth 1,0327 annehmen können. Aus all diesen Werthen ergibt sich nun die folgende Tab. XII.

Tabelle XII. Brechungsexponenten für Na-Licht.<sup>1)</sup>

Flüssigkeiten	Brechungs- exponent	Temp.
Wasser . . . . .	1,33345	19,40°
Gerein. Schwefelkohlenstoff {	1,62965	18,10
	1,62970	18,05
Benzol u. Benzoesäure . .	1,50297	17,90
Thiophenfreies Benzol . .	1,50281	18,10
Aethyläther (üb. Na dest.) .	1,35465	16,85
Methylalkohol . . . . .	1,32997	17,60
Aethylalkohol 99,8 Proc. {	1,36195	19,55
	1,36217	19,05
n. Propylalkohol . . . .	1,38677	17,60
Isopropylalkohol . . . .	1,37985	17,45
n. Butylalkohol . . . .	1,40075	17,50
Isobutylalkohol . . . .	1,39703	18,10
Amylalkohol (Gährungs-) .	1,40893	17,60

Die obigen Werthe stimmen zum grössten Theil sehr gut mit den von anderen Beobachtern gefundenen überein; auch hätten wir in Anbetracht der Thatsache, dass sorgfältige Beobachter die Brechungsexponenten unserer Flüssigkeiten bereits bestimmt haben, keinen Grund gehabt zu einer Wiederholung dieser Messungen, wenn wir keinen Werth

1) Mitte der Na-Linien.



darauf gelegt hätten, die verschiedenen Constanten von denselben Flüssigkeiten zu bestimmen.

### C. Die Beer'sche und die Lorentz'sche Formel.

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> ist, wie bereits eingangs erwähnt, der eine von uns zu dem Resultat gekommen, dass der Zusammenhang der durch Druck bewirkten Aenderung des Brechungsexponenten und der Dichte des Wassers durch die Beer'sche Formel  $(n-1)/d = \text{const.}$  fast genau, dagegen viel weniger gut durch den Lorentz'schen Ausdruck  $(n^2-1)/(n^2+2) \cdot 1/d = \text{const.}$  dargestellt werden kann. Ohne uns auf eine Prüfung anderer, ähnlicher Ausdrücke (Newton, Ketteler etc.) einzulassen, möchten wir die Frage beantworten, welche der beiden speciell genannten Formeln unseren Resultaten am besten entspricht. Wir haben zu diesem Zweck mit Hilfe jener Formeln aus den Resultaten der vorliegenden Arbeit die Compressibilität der Flüssigkeiten  $\mu_1$  resp.  $\mu_2$  berechnet und diese mit der direct beobachteten Compressibilität<sup>2)</sup>  $\mu$  zusammengestellt. In dieser Weise ist die untenstehende Tabelle XIII entstanden.

Tabelle XIII.

Flüssigkeiten	Temp.	Compressibilität			$(\mu_1 - \mu) 10^6$	$(\mu_2 - \mu) 10^6$
		beob. $\mu \cdot 10^6$	n. Beer $\mu_1 \cdot 10^6$	n. Lorentz $\mu_2 \cdot 10^6$		
Wasser . . . . .	17,95°	46,2	45,7	41,5	- 0,5	-4,7
Gereinigt. Schwefelkohlenstoff . . .	18,05	89,5	103,3	82,5	+13,8	-7,0
Thiophenfr. Benzol .	17,90	91,7	99,4	84,1	+ 7,7	-7,6
Aethyläther (üb. Na destillirt) . . . .	8,15	163,8	171,4	154,0	+ 7,6	-9,8
Methylalkohol . . .	17,60	119,5	124,4	113,0	+ 4,9	-6,5
Aethylalkohol 99,8% .	19,30	111,4	116,5	104,6	+ 5,1	-6,8
n-Propylalkohol . .	17,60	96,9	101,6	90,3	+ 4,7	-6,6
Isopropylalkohol . .	17,45	103,2	108,4	96,6	+ 5,2	-6,6
n-Butylalkohol . . .	17,50	90,5	95,3	84,2	+ 4,8	-6,3
Isobutylalkohol . .	18,10	98,4	103,7	91,8	+ 5,3	-6,6
Amylalkohol (Gährungs-) . . . .	17,60	90,4	95,7	84,3	+ 5,3	-6,1

Die  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  gelten für die in der zweiten Columne

1) Zehnder, Wied. Ann. **34**. p. 91. 1888.

2) Röntgen, Wied. Ann. **44**. p. 1. 1891.

stehenden Temperaturen, und zwar sind die Werthe für die meisten Flüssigkeiten auf die Temperatur reducirt, bei welcher der Brechungsexponent bestimmt wurde. Dieses Verfahren ist einwurfsfrei, namentlich weil es sich fast überall um kleine Aenderungen der betreffenden Werthe handelt. Nur bei Aethyläther war eine grössere Reduction nöthig, und sind die  $\mu_1$  und  $\mu_2$  für die Temperatur berechnet, bei welcher die Compressibilität beobachtet wurde, denn es gelang nicht für Aethyläther die Compressibilität bei mehr als einer Temperatur zu bestimmen.<sup>1)</sup> Zu dieser Reduction haben wir, ausgehend von dem von uns bei 16,85° bestimmten Brechungsexponenten, den von Landolt<sup>2)</sup> in Uebereinstimmung mit Lorenz<sup>3)</sup> gefundenen Werth der Aenderung des Brechungsexponenten des Aethyläthers mit der Temperatur (0,00058 für 1°) benutzt. Die Sicherheit der so erhaltenen Werthe dürfte wohl kaum geringer sein, als die der übrigen.

Aus dieser Tabelle geht mit Sicherheit hervor, dass weder die Beer'sche noch die Lorentz'sche Formel die durch Druck erzeugte Aenderung des Brechungsexponenten der untersuchten Flüssigkeiten mit einer innerhalb der Fehlergrenze der Versuche liegenden Genauigkeit darstellt. In fast allen Fällen, nur nicht beim Wasser, liegt der wirkliche Werth zwischen den beiden sich aus diesen Formeln ergebenden.

Zu demselben Resultat kommt man, wenn man die Rechnungen für tiefere Temperaturen anstellt. Die darauf bezüglichen Werthe sind in der obigen Tabelle nicht enthalten, weil die Aenderung des Brechungsexponenten mit der Temperatur von uns nicht bestimmt wurde. Für die erwähnte Rechnung muss man deshalb die von anderen Beobachtern gefundenen Temperaturcoefficienten der Brechungsexponenten benutzen.

Schreibt man die Lorentz'sche Gleichung in ihrer ursprünglichen Gestalt:  $(K-1)/(K+2) \cdot 1/d = \text{const.}$ , wo  $K$  die Dielectricitätsconstante des betreffenden Körpers bedeutet, so wäre es immerhin noch möglich, dass diese Beziehung

1) Röntgen, Wied. Ann. 44. p. 9 u. 10. 1891.

2) Landolt und Börnstein, Tabellen p. 211.

3) Landolt und Börnstein, Tabellen p. 207.

der Wirklichkeit entspräche. Nimmt man dies einmal an, so gelangt man für die Flüssigkeiten mit hoher Dielectricitätsconstante zu einer bemerkenswerthen Folgerung; man findet nämlich, dass die Dielectricitätsconstante durch Druck sehr bedeutend geändert werden müsste im Vergleich zu der Aenderung, welche die Dichte des Körpers durch Druck erfährt. So ergibt sich z. B. mit Benutzung der von Cohn und Arons und Tereschin gefundenen Werthe von  $K$  folgende

Procentische Aenderung pro Atmosphäre von:

	$K$	$d$
Wasser . . . . .	0,12	0,005
Methylalkohol . . . .	0,13	0,012
Aethylalkohol . . . .	0,10	0,011
Amylalkohol . . . . .	0,05	0,009

Bei Wasser müsste somit die Dielectricitätsconstante ca. 25 mal stärker durch den Druck beeinflusst werden, als die Dichte, oder was dasselbe ist, als die in der Volumeneinheit enthaltene Anzahl von Moleculen. Bei den drei ersten Flüssigkeiten wäre die Aenderung von  $K$  so beträchtlich, dass man sie bei Drucken von 100 bis 500 Atm. sicher finden müsste, wenn auch die Methoden zur Bestimmung der Dielectricitätsconstante noch bei Weitem nicht den Grad von Genauigkeit erreicht haben, wie die zur Bestimmung der Brechungsexponenten.

Die Lorentz'sche Beziehung ist übrigens keine nothwendige Consequenz der Maxwell'schen Theorie; sie ist mit Hülfe von gewissen Vorstellungen über das Verhalten des Aethers und der Körpermoleculen entstanden, die von Maxwell nicht eingeführt wurden.

Würzburg, Phys. Inst., Juni 1891.

### III. Ueber den Einfluss der Capillarität auf die Gleichgewichtsverhältnisse schwimmender Körper; von Th. Lohnstein.<sup>1)</sup>

Die Untersuchungen Wilhelmy's<sup>2)</sup> haben bekanntlich ergeben, dass die Gleichgewichtsverhältnisse von in Flüssigkeiten eingetauchten Körpern durch die Capillaritätstheorie nicht in voller Strenge dargestellt werden. Die eine der Abweichungen von der Theorie, welche Wilhelmy nachgewiesen zu haben glaubte, der Einfluss der Krümmung der Oberfläche des eingetauchten Körpers, lässt sich jedoch sehr wahrscheinlich als Folge mangelhafter Versuchsberechnung hinstellen<sup>3)</sup>, die zweite, der Einfluss der Grösse der Benetzungsfläche des Körpers, welchen Wilhelmy — wie durch Röntgen<sup>4)</sup> und Schleiermacher<sup>5)</sup> überzeugend dargethan, irrtümlich — auf eine Oberflächenverdichtung der Flüssigkeit seitens des festen Körpers zurückführen zu müssen glaubte, ist bis jetzt noch nicht befriedigend erklärt.

In der That existiren noch anderweitige Versuche, welche

1) Nach seiner Inauguraldissertation für die Annalen vom Verfasser bearbeitet.

2) Wilhelmy, Pogg. Ann. 119. p. 177. 1863; 121. p. 44. 1864; 122. p. 1. 1864.

3) Vgl. des Verf. Dissertation, p. 25. Anm. Vollständig scheint mir allerdings auch diese Frage noch nicht erledigt zu sein, da Versuche mit so kleinen Capillardurchmessern, wie sie z. B. Simon (Ann. de chim. et de phys. (3) 32. 1851) anwandte, in grösserem Maassstabe seitdem nicht wiederholt worden sind. Volkmann's Versuche (Wied. Ann. 11. p. 177. 1880) sind nicht geeignet, die Frage zu entscheiden, da er die Dimensionen seiner Capillaren nicht hinreichend variierte; überdies lassen sie gerade einen Einfluss im Sinne Simon's erkennen; und die Annahme einer constanten Wandschicht zur Erklärung dieses Umstandes führt aus dem Grunde eine neue Schwierigkeit herbei, weil bei der Dicke, die Volkmann für jene Schicht findet, die innere Oberfläche derselben, doch wohl ein Kreiscylinder, derselben Differentialgleichung genügen müsste, wie die Meniscusfläche, was nicht der Fall ist.

4) Röntgen, Wied. Ann. 3. p. 321. 1878.

5) Schleiermacher, Wied. Ann. 8. p. 52. 1879.

sich mit der Theorie unmöglich vereinigen lassen, nämlich gewisse Steighöhenversuche von Quincke<sup>1)</sup> und den Wilhelmy'schen ähnliche Beobachtungen von Heringa.<sup>2)</sup> Diesbezügliche Versuche von Simon<sup>3)</sup> will ich hierzu nicht rechnen, weil sie offenbar nicht mit der erforderlichen Sorgfalt angestellt sind.

In der vorliegenden Arbeit werden Versuche beschrieben, welche gewissermaassen das Gegenstück zu jenen Wilhelmy's bilden. Bei unseren Versuchen bleibt die gemeinsame Berührungsfläche des festen Körpers und der Flüssigkeit während einer Versuchsreihe von gleicher Grösse, das variable Element ist die Meniscushöhe. Ein weiterer, für die Reinheit der Beobachtungen, wie ich glaube, vortheilhafter Unterschied ist, dass diese Versuche nicht direct am Arm der Wage ausgeführt werden. — Auch hier zeigen sich nicht unerhebliche Differenzen zwischen Theorie und Erfahrung, und da eine etwa vorhandene Oberflächenverdichtung bei der Anordnung der Versuche von selbst in ihrer Wirkung eliminirt wird, andererseits aus anderweitigen, sowohl auf gleichsinnig als ungleichsinnig gekrümmte Flächen bezüglichen Messungen sich eine hinreichende Uebereinstimmung mit der Theorie hinsichtlich der Form der Capillarflächen ergab, so glaube ich — besonders auch in Hinblick auf die oben erwähnten Beobachtungen von Quincke — den Grund aller jener Abweichungen in dem Theile der Theorie suchen zu sollen, der sich auf die Berührungsfläche von festen Körpern und Flüssigkeiten bezieht.

Als Versuchsflüssigkeit benutzte ich fast ausschliesslich destillirtes, nicht ausgekochtes Wasser.<sup>4)</sup>

Um möglichst sichere Schlüsse zu ziehen, widmete ich

1) Quincke, Pogg. Ann. 139. p. 49—52. 1870. Man vergl. Dissertation p. 5, Anm. 1 und die Bemerkungen von Braun in Winkelmann's Handbuch der Physik 1. p. 470. 1890.

2) Heringa, Arch. néerl. 15. p. 132. 1890. Indess dürften sich gegen die Versuchsmethode und die Ueberlegungen H.'s Einwände erheben lassen.

3) Simon, Ann. de chim. et de phys. (3) 32. 1851. Man vergl. Dissertation p. 28—29.

4) Wegen der Gründe hierzu vergl. Dissertation p. 7.

der Berechnung besondere Aufmerksamkeit. Die Formeln, welche von Laplace<sup>1)</sup> und Poisson<sup>2)</sup> abgeleitet und seither von einer Reihe Experimentatoren zur Berechnung ihrer Versuche verwendet worden sind, beruhen auf so vielen im Laufe der Entwicklungen eingeführten Vernachlässigungen, dass es schwer ist, denselben das wünschenswerthe Vertrauen zu schenken, besonders da nirgends über die Grösse des begangenen Fehlers Untersuchungen angestellt sind. Auch ich musste mich naturgemäss mit Näherungsrechnungen begnügen, suchte denselben aber eine grössere Strenge zu geben. Indem ich bezüglich der Begründung auf meine Dissertation verweise, will ich zunächst die Resultate dieser Rechnungen angeben, um dann zur Beschreibung der Versuche überzugehen.

Von vornherein sei bemerkt, dass ich mich durchgehend auf Rotationsflächen beschränkte.

Ist  $H$  die von Poisson mit  $a^2$  bezeichnete Constante, also  $\sqrt{H}$  die verticale Entfernung der Kuppe eines unendlich grossen kreisförmigen Tropfens von der Ebene desjenigen Parallelkreises, für den der zugehörige Tangentialkegel ein Kreiscylinder ist,  $y$  die entsprechende Entfernung, wenn der zugehörige Tangentialkegel gegen den Horizont die Neigung  $\vartheta$  hat und der Halbmesser des Berührungskreises  $x$  ist; ist ferner  $H/h$  der Krümmungshalbmesser des Tropfens in der Kuppe,  $h$  also die Grösse, welche für den Fall der Capillarröhren die Steighöhe ist, so gelten folgende Beziehungen:

$$(I) \quad H < \frac{y^2 + \frac{3}{2} h y}{1 - \cos \vartheta + \frac{y}{2x} \sin \vartheta}.$$

$$(II) \quad \left\{ H > \frac{y^2 + 2 h y}{1 - \cos \vartheta + \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin \vartheta}{x} y - 4 \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{x^2} (y^2 + h y) \left( -\sin \vartheta + \frac{x(y+h)}{H} \right) - \frac{1}{H} \left( H \frac{\sin \vartheta}{x} - h \right)^2 \right]} \right\}$$

wo zur Abkürzung:

$$N = 1 + \frac{4 \operatorname{ctg} \vartheta}{x^2} (H \sin \vartheta - x(y+h))$$

1) Laplace, Mécanique céleste suppléments au X<sup>ème</sup> livre.

2) Poisson, Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831.

gesetzt ist. — Die Beziehung (II) ist leider nicht eben einfach; für  $\vartheta = \pi/2$  aber reducirt auch sie sich beträchtlich, sodass man unter Anwendung leicht verständlicher Bezeichnungen für diesen Fall erhält:

$$H < \frac{y_0^2 + \frac{3}{2} h y_0}{1 + \frac{y_0}{2r}}, \quad H > \frac{(y_0 + h)^2}{1 + \frac{y_0 + 2h}{r} - \frac{H}{r^2}}. \quad 1)$$

Die vorstehenden Formeln unterscheiden sich in ihrer Form durchaus von der nach dem Vorgang von Poisson bisher zur Berücksichtigung des Einflusses des Tropfenhalbmessers benutzten Correction; auch dieser ähnliche Ungleichheiten habe ich entwickelt:

$$(I_A) \quad H(1 - \cos \vartheta) < y^2 + 2hy - \frac{2}{3\sqrt{3}x} [(2H)^{3/2} - (2H - \frac{1}{2}y^2)^{3/2}].$$

$$(II_A) \quad H(1 - \cos \vartheta) > y^2 + 2hy - \frac{1}{2x} [(2H)^{3/2} - (2H - y^2 - hy)^{3/2}].$$

Was nun  $h$  anbetrifft, so ergeben sich dafür, abgesehen von dem Fall der Capillarröhren<sup>2)</sup> Grenzen, die im allgemeinen voneinander beträchtlich verschieden sind, immerhin aber seine Grössenordnung zu beurtheilen erlauben.<sup>3)</sup> Man erhält nämlich:

1) Ein numerisches Beispiel ist vielleicht hier am Platze. Quincke fand (Pogg. Ann. 160. p. 355. 1877) für  $r = 50$  mm bei Wasser:  $y_0 = 3,975$  mm. Da, wie aus III und IV ersichtlich,  $h$  hier als verschwindend angesehen werden kann, so ergibt sich  $H < 3,975^2/1,03975$ , mithin  $H/2 < 7,60$ ; ebenso folgt  $H/2 > 7,36$ ; die Anwendung der Formel für  $r = \infty$  würde also einen Fehler von gegen 5 Proc. veranlassen. — Die Anwendung der obigen Relationen auf jene Beobachtungsreihe von Quincke, aus der sich als Mittelwerth der oft citirte Werth 8,253 für die Capillarconstante des Wassers ergab (Pogg. Ann. 139. p. 12. 1870), unterlasse ich, weil wegen der Grösse von  $h$  bei diesen Versuchen die beiden Grenzen zu sehr von einander abweichen, immerhin aber dürfte auch hier eine Correction von gegen 5 Proc. im Sinne der Verkleinerung von  $H/2$  resultiren.

2) Vgl. Dissertation p. 14.

3) Dass die bekannte Poisson'sche Formel für den Krümmungsradius der Kuppe in den meisten Fällen auch nur eine rohe Approximation darstellt, davon überzeugte ich mich mit Hilfe der in dem Werke von Bashforth und Adams „An Attempt to test the theories of Capillary Action“, Cambridge 1883 enthaltenen, die Tropfen bis etwa  $r/\sqrt{H} = 2$  umfassenden, Tabellen. Es wurden zwei der bekanntesten Abhandlung von A. König (Wied. Ann. 16. p. 1. 1882) entnommene



$$(III) \quad h > \frac{8y}{1 + \sqrt{1 - y^2/2H}} e^{-\frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{H}} - 2 + 2\sqrt{1 - (y^2 + 2ky)/2H}}$$

$$(IV) \quad h < \frac{6y + 4k}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}(y + \frac{2}{3}k)^2/H}} e^{-\frac{\pi \cdot \sqrt{6}}{2\sqrt{H}} - 2 + 2\sqrt{1 - \frac{2}{3}(y + \frac{2}{3}k)^2/H}}$$

Endlich erwähne ich noch die vielleicht auch physikalisch nicht uninteressante Thatsache, dass die Meridian-curve eines Tropfens (oder einer Blase) nicht geschlossen ist.

Bei der Untersuchung der capillaren Sattelflächen beschränken wir uns auf den Fall, dass sie eine hinreichende Ausdehnung haben, um ihnen horizontale Theile zuschreiben zu können, sodass also, wenn für letztere  $y = 0$ , auch  $h = 0$  ist.

G. Kirchhoff<sup>1)</sup> hat eine hierauf bezügliche approximative Formel abgeleitet, welche, wie ich zeige, den Anfang einer divergenten Entwicklung darstellt. Setzt man nämlich:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{-k},$$

wo  $f_k$  nur von  $\vartheta$  abhängt, so erhält man eine divergente Reihe, und zwar findet man:

$$(V) \quad \left\{ \begin{aligned} f_0 &= \sqrt{2H} \sin \frac{\vartheta}{2}, & f_1 &= -\frac{H}{3} \frac{1 - \cos^3 \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}}, \\ f_2 &= -\frac{1}{18\sqrt{2}} \frac{H\sqrt{H} \left(1 - \cos^3 \frac{\vartheta}{2}\right)^3}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{H\sqrt{H} \left(1 - \cos^3 \frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2}, \\ f_3 &= -\frac{f_1 f_2}{f_0} - \frac{H}{2} \sin \vartheta \frac{f_2}{f_0} - \frac{H^2}{36 \sin \frac{\vartheta}{2}} \left(1 - 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \right. \\ &\quad \left. + 4 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \cos^3 \frac{\vartheta}{2} - 2 \cos^5 \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{4} \right). \end{aligned} \right.$$

Weiter habe ich die Berechnung nicht geführt, Kirchhoff's Formel erhält man, wenn man bis  $f_1$  geht. — Will

Beispiele berechnet, wo sich  $H = 4,19$  und  $7,05$  ergibt, während die Anwendung jener Formel  $4,5$  und  $9,02$  liefert, also Fehler von  $7,4$  Proc. und  $28$  Proc. herbeiführt. Die allgemeinen Schlüsse der A. König'schen Untersuchung werden allerdings dadurch nicht berührt.

1) G. Kirchhoff, Mechanik p. 159.

man nur die erste Potenz von  $x^{-1}$  berücksichtigen, so kann man sich der Ungleichheiten:

$$(VI_A) \quad y \sqrt{1 + \frac{H}{8x^3}} > \sqrt{2H} \sin \frac{\vartheta}{2} - \frac{H}{3x} \frac{1 - \cos^3 \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}},$$

$$(VI_B) \quad y \left(1 - \frac{H}{8x^3}\right) < \sqrt{2H} \sin \frac{\vartheta}{2} - \frac{H}{3mx} \frac{1 - \cos^3 \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}}.$$

bedienen, wo  $m$  die positive Wurzel der Gleichung:

$$\xi^2 + (1 - m_0) \xi - 1 = 0 \quad \text{und} \quad m_0 = 1 + \frac{\sqrt{H}}{x\sqrt{2}} \quad \text{gesetzt ist.}$$

Die Brauchbarkeit der vorstehenden Formeln habe ich an einer Anzahl von numerischen Beispielen geprüft, bei denen ich der Einfachheit halber  $\vartheta = \pi/2$  setzte.<sup>1)</sup> Es handelt sich bei ihrer Anwendung darum,  $H$  aus  $y$  und  $r$  (d. i.  $x$  für  $\vartheta = \pi/2$ ) zu bestimmen. Es ergab sich, indem der Fehler der obigen bis  $f_3$  geführten divergenten Entwicklung mit Hülfe einer linearen Differentialgleichung abgeschätzt wurde, dass sie für  $r\sqrt{H} > 3,5$  als streng zu betrachten ist; und mit Hülfe mechanischer Integration wurde ferner gezeigt, dass, falls  $f_3$  durch  $\frac{1}{2}f_3$  ersetzt wird, ihre Anwendbarkeit sich noch viel weiter erstreckt. Ausserdem stellte sich heraus, dass das arithmetische Mittel der durch Benutzung von  $VI_A$  und  $VI_B$  erhaltenen Werthe von  $H$  in den berechneten Beispielen stets fast genau mit dem aus jener Entwicklung hergeleiteten  $H$  übereinstimmt. Die Kirchhoff'sche Formel veranlasst noch bei  $r = 14$  mm für Wasser einen Fehler von gegen 2 Proc.

Aus einem gewissen Grunde<sup>2)</sup> musste ferner untersucht werden, wie sich die Meridiancurve bei Fortsetzung nach der Rotationsaxe verhält; es zeigte sich, dass sie letztere direct unter keinen Umständen erreichen kann.

Um nun zu den Versuchen überzugehen, so suchte ich zunächst festzustellen, ob sich durch Messungen der Gestalt

1) Vgl. Dissertation p. 33 u. 34.

2) Vgl. Dissertation p. 27, Anm.

von Capillarflächen, sowohl gleichsinnig wie ungleichsinnig<sup>1)</sup> gekrümmter, irgend welche Abweichungen von der theoretisch vorgeschriebenen Form nachweisen liessen. Es war dies innerhalb der Genauigkeitsgrenzen meiner Messungen nicht der Fall. — Ich will hier nur die bei Tropfen und concav-concaven Flächen angewandte Methode auseinandersetzen. — Zur Aufnahme der Versuchsflüssigkeit dienten niedrige cylindrische Glasgefässe mit scharfkantig eben abgeschliffenem oberen Rande. Diese Cylinder wurden auf ein mit drei Fuss-schrauben versehenes Messingtischchen gesetzt. Der vorher gereinigte Cylinder wurde soweit mit der Flüssigkeit gefüllt, bis bei trockner Randfläche letztere an einer Stelle der inneren Randkante keine Krümmung mehr zeigte. Mit einer feinen Pipette wurde nun vorsichtig weiter Flüssigkeit hinzugegeben und die Stellschrauben benutzt, um am ganzen Rande den Meniscus zum Verschwinden zu bringen, was durch die möglichst unverzerrte Spiegelung eines geradlinigen Gegenstandes, etwa eines Fensterkreuzes, constatirt wurde. Diese Art der Einstellung erwies sich als vollkommen ausreichend. Zur Erzeugung der concaven Flächen wurde der ebene Flüssigkeitsspiegel mit Hülfe eines kleinen mit Spritzenflaschenvorrichtung versehenen Kölbchens abgesaugt, dessen die Flüssigkeitsoberfläche berührendes Rohr in eine feine Oeffnung ausgezogen war, welche jene eben nur streifen durfte. Aehnlich wurden convexe Flächen hergestellt. — Von einer jeden solchen Fläche wurden nun folgende Bestimmungsstücke gemessen: 1. durch Wägung wurde das Volumen ermittelt<sup>2)</sup>, welches durch die Horizontalebene des Randes und die gekrümmte Oberfläche begrenzt ist, 2. wurde die Pfeilhöhe des Meniscus gemessen, 3. war der mittlere Durchmesser des fast kreisförmigen Randes bekannt.

Zur Messung der Pfeilhöhe des Meniscus wurde die Spitze einer Mikrometerschraube unmittelbar nach der Herstellung der ebenen und der gekrümmten Fläche mit der Flüssigkeit zur Berührung gebracht. Der Moment, wo die Spitze scheinbar mit ihrem Spiegelbild zusammenfällt, lässt sich bei einer dieselbe benetzenden Flüssigkeit nie mit Schärfe

<sup>1)</sup> Ueber letztere vergl. Dissertation p. 7, oben.

<sup>2)</sup> Ueber den Einfluss der Verdunstung vgl. Dissertation p. 19.

auffassen, daher wurde die Stellung der Schraube dann abgelesen, wenn bei ganz vorsichtigem Drehen des Kopfes zum ersten Mal ein kleiner Meniscus an der Spitze erschien. — Der benutzte in der Werkstätte des Herrn C. Bamberg verfertigte Apparat hatte eine mittlere Schraubenganghöhe von 0,25 mm<sup>1)</sup> und eine Trommeltheilung von 100 Strichen.

Die Reihenfolge der Bestimmungen war die, dass bei concaven Flüssigkeitsoberflächen zuerst der ebene Spiegel abgelesen, derselbe hierauf mit dem Spritzkölbchen abgesaugt und sofort wieder eingestellt wurde; dann erst wurde die Gewichtszunahme des Fläschchens ermittelt. Jede Ablesung des Sphärometers bestand aus 3—5 Einstellungen, deren grösste Differenz in ungünstigen Fällen 4—5 Theilstriche, also etwa 0,01 mm betrug, und aus denen das Mittel genommen wurde; bei einer grösseren Zahl von Einstellungen hätte sich jedenfalls der Einfluss der Verdunstung bemerkbar gemacht. Bei convexen Flächen war die Reihenfolge der beiden Sphärometerablesungen natürlich die umgekehrte.

Die Bestimmung der Cylinderdurchmesser erfolgte ebenso wie bei den später zu erwähnenden Schwimmern mit dem Kathetometer und konnte mit beträchtlicher Genauigkeit ausgeführt werden.<sup>2)</sup>

Die Berechnung dieser Versuche geschah folgendermaassen. — Sind  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die specifischen Gewichte der Flüssigkeit und der Luft,  $G$  die uncorrigirte Gewichtszunahme des Spritzkölbchens,  $r$  der mittlere Halbmesser des Cylinderrandes, und haben  $H$ ,  $h$ ,  $y$ ,  $\vartheta$  dieselbe Bedeutung wie früher, so ist:

$$H \sin \vartheta = ry + rh - G/r\pi(\sigma_1 - \sigma_2) = B,$$

$$H(1 - \cos \vartheta) < \frac{1}{2}y^2 + hy + Gy/2r^2\pi(\sigma_1 - \sigma_2) = A^3)$$

und, indem sich die Beziehung (II) in erfreulicher Weise durch Einführung von  $G$  vereinfacht:

$$H(1 - \cos \vartheta) > \frac{1}{2}y^2 + hy + (G/r^2\pi(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2}y^2)/(1 - 4G \operatorname{ctg} \vartheta / r^3\pi(\sigma_1 - \sigma_2)) = A'.$$

1) Genauere Angabe s. Dissertation p. 20.

2) Ueber die Einzelheiten dieser Messung vgl. Dissertation p. 20.

3) In der Dissertation sind leider an dieser Stelle einige Druckfehler stehen geblieben.

Wird mit  $\alpha$  die Capillaritätsconstante in dem gewöhnlich gebrauchten Maasse bezeichnet, so folgt hieraus:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)(A^2 + B^2)/2A < \alpha < \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)(A'^2 + B^2)/2A'.$$

Ist  $\vartheta > \frac{1}{2}\pi$  und  $A' > B$ , so kehrt sich die Bedeutung der beiden Grenzen für  $\alpha$  um. Die Fälle, wo  $\vartheta$  sehr wenig von  $\frac{1}{2}\pi$  verschieden ist, erfordern eine besondere Behandlung.<sup>1)</sup>

An Stelle der Relationen (I) und (II) können auch (I<sub>A</sub>) und (I<sub>B</sub>) benutzt werden. Was  $h$  anlangt, so wurde von den Relationen (III) und (IV) in vereinfachter Weise Gebrauch gemacht.<sup>2)</sup>

Der Unterschied der beiden so berechneten Grenzen wird um so kleiner, je weniger  $\vartheta$  von einem Rechten verschieden ist, weil die Werthe von  $\sin \vartheta$  von 1 dann nur um Grössen der zweiten Ordnung abweichen. Diesen Vortheil kann man allerdings nur verwerthen, wenn  $h$  bekannt oder so klein ist, dass es ohne merklichen Fehler gleich Null gesetzt werden kann. Die Möglichkeit, letzteres a priori zu entscheiden, geben uns die Beziehungen (III) und (IV). Aus ihnen folgt, dass, wenn  $r > 8\sqrt{H}$  und man sich mit einer Genauigkeit von zwei Decimalen begnügt,  $h$  vernachlässigt werden kann. In diesen Fällen rührt die Unsicherheit in dem Werthe der Capillarconstante nur von den Beobachtungsfehlern her. Da es uns darauf ankam, Flächen verschiedener Dimensionen zu untersuchen, so mussten wir auf die genannten Vorthelle verzichten.<sup>3)</sup>

Nach der auseinander gesetzten Methode wurden acht Versuchsreihen an destillirtem Wasser, zwei an absolutem Aethylalkohol angestellt.<sup>4)</sup> Die Werthe von  $r$  waren in

1) Vgl. Dissertation p. 21.

2) Hierüber, und über weitere Details der Berechnung vgl. Dissertation p. 21.

3) Man erkennt, dass, wenn man sich auf concave Flächen und Werthe von  $\vartheta$  in der Nähe von  $90^\circ$  beschränkt, welches letztere man durch blosses Augenmaass erreichen kann, das oben auseinander gesetzte Verfahren unter Berücksichtigung des über  $r$  gesagten eine bequeme und genaue Bestimmung der Capillarconstante gestattet. Nur wird man sich bei Flüssigkeiten, welche Glas weniger benetzen, anstatt des cylindrischen eines conischen Glasgefässes bedienen, welches oben enger als unten ist.

4) Man vgl. die Tabellen Dissertation p. 22 u. 23.

den Grenzen 6—24 mm enthalten. Die benutzten Meniscushöhen variirten von 0,498 mm bis 4,252 mm. Die durchschnittliche Temperatur betrug  $15^{\circ}$ . Für Wasser ergaben die einzelnen Versuchsreihen die Mittelwerthe 7,46; 7,50; 7,57; 7,52; 7,60; 7,63; 7,32; 7,74; das Gesamtmittel ist hiernach 7,54. — Die beiden Messungen für Alkohol hatten 2,76 und 2,62 zu Resultaten, ihr Mittelwerth ist also 2,69.<sup>1)</sup>

Als Resultat dieser Beobachtungen konnte ausgesprochen werden, dass die Theorie die Gestalt der untersuchten Flächen in befriedigender Weise darstellt.

Ich wende mich jetzt zu den Schwimmerversuchen, welche, ebenso wie die erst beschriebenen, auf der Thatsache beruhen, dass durch eine scharfe Kante den dort befindlichen Elementen einer Flüssigkeitsoberfläche eine innerhalb weiter Grenzen veränderliche Richtung gegeben werden kann. Es wurden Körper benutzt, die in ihrer Form Aräometern ähnlich waren, sich von diesen aber dadurch unterschieden, dass ihr oberer cylindrischer Theil nicht wie gewöhnlich bei jenen am Ende geschlossen, sondern oben offen und mit scharfkantigem, eben abgeschliffenen, kreisförmigen Rande versehen war. Die Massenvertheilung im Inneren eines solchen Körpers sei anfänglich derart, dass er, in die Flüssigkeit gebracht, schwimmt und sich hierbei sein cylindrisches, von ihr benetztes Ende in annähernd verticaler Stellung befindet. Bei successiver Vergrößerung der Belastung des Schwimmers wird schliesslich kein Theil seiner äusseren Oberfläche un-

1) Das specifische Gewicht des Alkohols war = 0,79913 bei  $15^{\circ}$ . — Der für die Capillarconstante des Alkohols erhaltene Werthe weicht beträchtlich von dem von anderen Beobachtern mit Hülfe von Capillarrohren ermittelten Werthe ab. Ich möchte mir erlauben hier eine Vermuthung zur Erklärung dieses Umstandes zu äussern. Die Verdampfungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit wird ausser durch die Temperatur durch geometrische Verhältnisse bedingt (vgl. Stefan, Wied. Ann. 41. p. 725. 1890), die bewirken, dass der Dampf von der Oberfläche des äusseren Gefässes schneller fortgeführt wird als von dem Meniscus im Capillarrohr. Wenngleich der Dampf unmittelbar über beiden Oberflächen dieselbe Dichtigkeit hat, so muss dies dennoch eine Verschiedenheit des factisch beobachteten Dampfdruckes zur Folge haben, die sich besonders bei Flüssigkeiten hoher Dampfspannung bemerkbar machen muss und dann eine anscheinende Verkleinerung der Capillarconstante zur Folge hätte.

benetzt sein; die Flüssigkeit wird überall an die äussere Kante des Randes heranreichen. Eine Linie, die in einem Punkte des Randes senkrecht zu diesem die Oberfläche der Flüssigkeit berührend ins Innere der letzteren gezogen ist, wird alsdann einen spitzen Winkel mit der Verticalen bilden, der sich bei weiterer Belastung stetig vergrössert und endlich für einen Punkt des Randes zuerst in einen Rechten übergeht. Damit letzteres für alle Punkte des Randes gleichzeitig eintrete, muss der Schwimmer Vorrichtungen enthalten, die es erlauben, seine Massenvertheilung entsprechend zu reguliren. Ist dies erreicht, verschwindet also die Krümmung der Oberfläche an allen Punkten der Randlinie, so stellt sich der Schwimmer als ein Aräometer dar, bei welchem der Einfluss der Capillarität eliminirt ist. Beschwert man den Schwimmer weiter, so bildet sich ein convexer Meniscus aus, dessen Begrenzung bis zu einem grossen Werth des Winkels  $\vartheta$ , der dieselbe Bedeutung hat wie oben, und nur wenig kleiner als  $90^\circ$  ist, unter Umständen auch diesen Betrag erreicht, durch die die äussere Randlinie des Schwimmers gegeben ist. Eine geringe Vermehrung der Belastung genügt, um nunmehr in wenigen Augenblicken die Flüssigkeit auf den Rand des Schwimmers treten zu lassen, wo sie, an der inneren Kante angelangt, Halt macht, sodass jetzt der Rand des Schwimmers vollständig von der Flüssigkeit überzogen ist. Ohne dass derselbe sofort untergeht, kann man seine Belastung vermehren, bis er bei einem Werthe des Winkels  $\vartheta$  sinkt, der zwar stets kleiner als  $180^\circ$  ist, oft aber beträchtlich einen Rechten übersteigt.<sup>1)</sup>

Als Grundlage der theoretischen Behandlung dieser Versuche wählen wir die Gauss-Kirchhoff'sche Form der

1) Die Thatsache, dass vermöge des convexen Meniscus Körper, die specifisch schwerer als die Flüssigkeit sind, sich an deren Oberfläche halten können, ist altbekannt. Allerdings liefen hierbei bisweilen kleine Irrthümer unter; so wird oft die Draht- oder Blechform des Körpers als wesentlich hingestellt; in Winkelmann's Handbuch der Physik 1. p. 475 findet sich ferner in Bezug auf das Maximalgewicht eines solchen Körpers eine Angabe, die aus zwei Gründen irrig ist: indem sie erstens den hydrostatischen Theil der dem Gewichte des Körpers entgegenwirkenden Kraft unberücksichtigt lässt, zweitens von der stillschweigenden Annahme ausgeht, dass  $\vartheta$  höchstens  $= 90^\circ$  sein könne.



Capillaritätstheorie. Es handelt sich um den Zusammenhang, der zwischen der Belastung und der durch sie hervorgerufenen capillaren Depression besteht. An Stelle der Bedingung, welche bei aräometrischen Untersuchungen gewöhnlich die Constanz des Randwinkels lieferte, tritt hier die Forderung, dass die Randlinie des Schwimmers stets eine Grenzlinie der capillaren Oberfläche sei. Theilweise hat Kirchhoff<sup>1)</sup> unser Problem behandelt; er setzt jedoch die Constante  $h$  als verschwindend voraus, was wir zunächst nicht thun wollen.

Es seien  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die specifischen Gewichte der Flüssigkeit und der Luft,  $P$  das Gewicht des Schwimmers,  $V_1$  das Volumen des von der äusseren Oberfläche des Schwimmers und der durch seinen Rand gelegten Ebene begrenzten Raumes,  $Q$  der Flächeninhalt der Horizontalprojection des Schwimmerrandes,  $V_2$  das von  $Q$ , der Randebene des Schwimmers und dem sie auf die Ebene  $y = 0$ <sup>2)</sup> projicirenden Cylinder begrenzte Volumen,  $A_{12}$  sei die absolut gemessene Capillarconstante,  $dl$  ein Element der Randlinie des Schwimmers; man findet:

$$(VII) \quad P = \sigma_1 g V_1 + (\sigma_1 - \sigma_2) g V_2 + h(\sigma_1 - \sigma_2) g Q + A_{12} \int dl \sin \vartheta,$$

wo  $\vartheta$  längs des Randes variabel ist.<sup>3)</sup>

Im allgemeinen wird die Flüssigkeit ausgedehnte horizontale Theile enthalten, und, falls für diese  $y = 0$ , wird dann  $h = 0$  sein; man kann aber auch leicht durch den Versuch Fälle realisiren, wo dies nicht der Fall ist. — Wir wollen im Folgenden stets  $h = 0$  setzen.

Die Gleichung (VII) lässt eine geometrische Deutung zu, welche sie als eine Verallgemeinerung des archimedischen Principes darstellt; nicht in der gleichen Weise lassen sich diejenigen hydrostatischen Sätze, welche die Orientirung eines

1) Kirchhoff, *Mechanik*. 13. Vorlesung. § 5. p. 147.

2) Die  $y$ -Coordinate möge mit der Richtung der Schwere zusammenfallen, während die Horizontalebene die  $x$ - und  $z$ -Coordinate enthalte.

3) Die Vernachlässigung von  $h$  erklärt wahrscheinlich den auf die Krümmung der eingetauchten Körper bezüglichen Theil der Wilhelmy'schen Resultate; vgl. *Dissertation* p. 25 Anm.

schwimmenden Körpers im Raume bestimmen, auf unseren Fall übertragen.<sup>1)</sup>

Ist der Rand des Schwimmers kreisförmig und befindet er sich in horizontaler Lage, so ist  $\vartheta$  constant; es geht (VII) dann über in:

$$P = \sigma_1 g V_1 + (\sigma_1 - \sigma_2) g r^2 \pi y + 2 A_{12} r \pi \sin \vartheta.$$

Ist  $P_0$  das Gewicht des Schwimmers, wenn kein Meniscus vorhanden ist, so ist hiernach:

$$(VIII) \quad P - P_0 = (\sigma_1 - \sigma_2) g r^2 \pi y + 2 A_{12} r \pi \sin \vartheta.$$

Von Interesse ist noch die Frage, wie weit — unter den eben eingeführten beschränkenden Voraussetzungen — der Schwimmer belastet werden darf, ohne zu sinken. Dies tritt ein, falls  $P$  als Function von  $y$  (bei constantem  $r$ ) ein Maximum hat, und es zeigt sich, dass letzteres stets für einen zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  gelegenen Werth von  $\vartheta$  stattfindet.<sup>2)</sup>

Ich wende mich nunmehr zur Beschreibung der Versuche. Im ganzen wurden fünf Schwimmer benutzt, deren innere und äussere Halbmesser zwischen den Grenzen 5 mm und 45 mm lagen. Indem ich wegen der Einzelheiten ihrer Construction auf meine Dissertation verweise, bemerke ich nur, dass, um dem oberen Rande die horizontale Lage zu geben, bei ihnen verschiedene Einrichtungen angewandt wurden. Bei zweien der Schwimmer bestand die mit der Flüssigkeit zur Berührung kommende Oberfläche ganz aus Glas, bei einem ganz aus vernickeltem Messing, bei zweien theilweise aus Glas, theilweise aus vernickeltem Messing.

Die Versuche wurden in einem Souterrain angestellt, dessen fester Steinboden den Einfluss der durch den Strassenverkehr verursachten Erschütterungen hinlänglich verminderte. Auf einer festen Gypssäule stand das Gefäss, welches die Flüssigkeit und den Schwimmer aufnahm. Bei den vier

1) Ueber einen entgegengesetzten Satz von P. Du Bois-Reymond vgl. Dissertation p. 27 Anm.

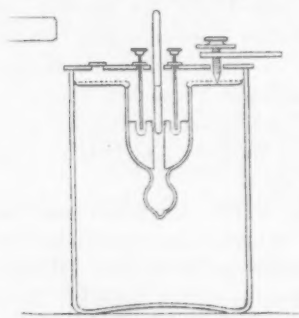
2) Das gleiche gilt natürlich auch von den Versuchen mit den sog. Adhäsionsplatten, die — nach dem Vorgang Poisson's — bisher stets für  $\vartheta = \pi$  berechnet worden sind. Wegen des grossen Werthes von  $r$  bei Gay-Lussac's Versuchen erleiden allerdings die Berechnungen Poisson's nur unbedeutende Aenderungen.

kleineren Schwimmern war dies ein quadratischer Glastrog von etwa 11,5 cm Seitenlänge, bei dem letzten grossen Schwimmer ein cylindrisches Glasgefäss, dessen Durchmesser etwas über 20 cm betrug. — Von grosser Wichtigkeit ist die absolute Reinheit der Wasserfläche, und besondere Sorgfalt muss darauf verwendet werden, dass durch das Einbringen des Schwimmers keine Verunreinigung herbeigeführt wird. Ferner muss, um eine ungestörte Beobachtung zu ermöglichen, bewirkt werden, dass der Schwimmer während einer Messungsreihe seine Lage auf der Wasseroberfläche fast ungeändert beibehält. Allen diesen Anforderungen wurde in folgender Weise genügt. — Dem Trog dienten als Deckel zwei rechteckige Messingplatten, welche zusammen ein den Trog vollständig bedeckendes Quadrat bildeten. Die einander berührenden Ränder derselben waren in ihrer Mitte mit je einer halbkreisförmigen Ausbuchtung versehen, welche also in der richtigen Lage der Platten zusammen ein kreisrundes Loch darstellten. Ausserdem enthielten die Platten noch mehrere andere kreisförmige Oeffnungen. — Die erste Operation, die nun ausgeführt wurde, und zu der aus erklärlichen Gründen ein anderes als das Versuchsgefäss benutzt wurde, war, dem Schwimmer eine solche Belastung und Massenvertheilung zu geben, dass er in destillirtem Wasser bei der Temperatur des Versuchsraumes ohne jeden Meniscus schwimmt. Dies wurde mit Hülfe der an den verschiedenen Schwimmern befindlichen Vorrichtungen bewirkt. Die Abwesenheit des Meniscus an allen Stellen des Randes wurde wie bei den oben beschriebenen Versuchen constatirt, und verschiedene Wägungen der meniscusfreien Schwimmer zeigten, dass mit dieser einfachen Methode eine beträchtliche Genauigkeit erzielt werden konnte.<sup>1)</sup>

Nach erfolgter Ausrichtung wurde der Schwimmer zunächst in dem Gefäss belassen, während das eigentliche Versuchsgefäss mit destillirtem Wasser gefüllt wurde. Hierbei wurde der Trog schon mit den Messingplatten bedeckt; durch einen Heber, der durch eine der Oeffnungen der Platte hindurchging, erfolgte der Eintritt der Flüssigkeit. Der Zufluss

1) Die näheren Angaben s. Dissertation p. 30.

derselben wurde erst beendet, sobald die Messingplatten überall von ihr berührt wurden; nunmehr wurde mit einer Pipette langsam so viel Flüssigkeit fortgenommen, dass letztere sich vollständig von der Messingplatte trennte. Man erreichte hierdurch, dass grössere Staubtheilchen, welche bei der Füllung in das Wasser mit hinein gerissen sein konnten, an der Messingplatte haften blieben, die natürlich darauf nochmals gereinigt und getrocknet wurde; in der That wurde auf diese Weise stets eine ungetrübte Oberfläche erzielt, was ja in der Grösse der erreichten Capillarrhöhen seinen Ausdruck findet. — Es wurden nun die Platten auseinander gezogen, der Schwimmer an der in seiner Mitte befindlichen, gleichzeitig der Beobachtung dienenden Scala gefasst, sodass seine noch von destillirtem Wasser benetzte Oberfläche keiner Verunreinigung ausgesetzt war, und die Messingplatten in der Weise aneinander geschoben, dass die beiden halbkreisförmigen Ausbuchtungen die Scala in ihre Mitte nahmen. Da die Oeffnung nur wenig weiter war, so waren hierdurch in der einfachsten Weise störende Ortsveränderungen des Schwimmers verhindert. Bei den Schwimmern, bei welchen besondere Höhlungen zur Aufnahme der Belastungen während des Versuchs dienten, mussten auch grössere Rotationen verhindert werden, um dem Experimentator die Beherrschung der einzelnen Pfannen zu ermöglichen. Es wurde zunächst bewirkt,



dass sich dieselben unter den oben erwähnten zu diesem Zweck in der Platte angebrachten Löchern befanden; um sie in dieser Lage zu fixiren, wurde über zwei gegenüberliegende Löcher je ein dieselbe nicht vollständig bedeckendes oblonges Messingplättchen gelegt, durch dessen Mitte eine lange Schraube von circa 2 mm Gewin-

dicke hindurchging, welche in die Höhlungen hineinreichte und ohne im übrigen einen Zwang auf die Lage des Schwimmers auszuüben, in leicht verständlicher Weise

nur so kleine Rotationen des Schwimmers zuließ, dass die Höhlungen beständig unter den entsprechenden Öffnungen verblieben. — Der eigentliche Versuch bestand nun darin, dass der Schwimmer mit gewogenen Massen belastet wurde; in den meisten Fällen war es feines Bleischrot (sogenannter Vogeldunst), nur bei dem grossen Schwimmer dienten gröbere Körner. Kam es auf kleinere Gewichts-differenzen an, wie bei dem Schwimmer mit kleinstem Durchmesser, so gelangten kleine Glaskügelchen zur Verwendung. Die Körner wurden einzeln mit der Pincette gefasst und vorsichtig in den Schwimmer herabgelassen. — Die durch die vorher gewogenen Belastungen erzeugten Meniscushöhen wurden mit dem schon oben benutzten Schraubensapparat und dem Kathetometer gemessen. Die Schraubenspindel des ersteren ging durch ein hierzu angebrachtes Loch der einen Messingplatte, dem natürlich eine solche Lage gegeben war, dass die Spitze des Instruments auf einen völlig ebenen Theil der Wasseroberfläche zeigte. Mit diesem Apparat wurden die Niveauänderungen des ebenen Flüssigkeitsspiegels bestimmt in derselben Weise wie bei den früheren Messungen. Mit dem Mikroskop des Kathetometers wurden ferner die Verschiebungen der Scala ermittelt; aus diesen beiden und den entsprechenden zum meniscusfreien Schwimmer gehörigen Ablesungen folgt in einfacher Weise die oben mit  $y$  bezeichnete Tiefe des Schwimmerrandes unter dem Niveau. Der Einfluss der Verdunstung kommt hier offenbar nur insofern in Betracht, als ein Beobachter nicht gleichzeitig die beiden Ablesungen ausführen kann, konnte also, da es sich hier höchstens um einen Unterschied von einigen Minuten handelt, vernachlässigt werden.

Durch einen besonderen Versuch überzeugte ich mich noch davon, dass bei vorsichtigem Verfahren die horizontale Lage des Schwimmerrandes während der successiven Belastungen hinreichend erhalten werden könne, indem ich oben an der Scala ein gleichseitig dreieckiges Plättchen befestigte, durch dessen Ecken je eine zugespitzte Schraube ging. In dem ungünstigsten Falle unter acht Einstellungen zeigte die Ebene des Randes eine Neigung von weniger als 2 Minuten gegen die ursprüngliche meniscusfreie Lage. Aus der Theorie geht

übrigens hervor, dass nur die mittlere Senkung des Schwimmers in Betracht kommt, welche durch unsere Art der Ablesung bis auf Fehler von der zweiten Ordnung der Neigungen des Randes gemessen wird.

Stellt man sich auf den Standpunkt der Theorie, so genügt die Kenntniss des Gewichts und der zugehörigen Senkung, um die Capillarconstante zu bestimmen. Wäre letztere unveränderlich, so würde zur Prüfung der Theorie die Ausführung einer Versuchsreihe mit verschiedenen Belastungen ausreichen. Bekanntlich aber wird die Oberflächenspannung durch geringfügige Einwirkungen äusserst stark beeinflusst. Um also eine vollständige Prüfung der Theorie zu ermöglichen, muss jeder einzelne Verlust mindestens ein überzähliges Bestimmungsstück enthalten. Als solches bietet sich zunächst der Winkel  $\vartheta$  dar. Diese Messung, mit der hier erforderlichen Genauigkeit ausgeführt, hat gewisse Schwierigkeiten. Vorläufig hat auf sie verzichtet werden müssen. Indess waren zwei bestimmte Winkel schon mit unsern einfachen Mitteln der Beobachtung zugänglich, nämlich einmal der Rechte und sodann der Winkel  $\vartheta_n$ , für den  $\cos \vartheta_n = n$ , wenn  $n$  das Lichtbrechungsverhältniss zwischen Wasser und Luft ist. So lange nämlich  $\vartheta < \vartheta_n$ , wird das Auge, so gestellt, dass ihm der Rand des Schwimmers als eine Gerade erscheint, nur reflectirtes Licht an der Innenseite der Capillarfläche wahrnehmen, ist  $\vartheta > \vartheta_n$ , so wird es unmittelbar über dem Rande einen kreissegmentförmigen Schimmer erblicken, der von gebrochenem, vorher an dem matt geschliffenen Rande reflectirten Lichte herrührt. Es ist nun  $\vartheta = \vartheta_n$ , wenn das Auge, anfangs etwas unterhalb des Randes befindlich, sodass es diesen als Ellipse sieht, langsam sich erhebend den zuerst sichtbaren Schimmer in demselben Augenblick verschwinden sieht, in welchem die Ellipse in eine Gerade übergeht. —

Das beste Verfahren zur Feststellung des Winkels  $\vartheta = 90^\circ$  ist offenbar die von Sieg benutzte Reflexionsmethode<sup>1)</sup>; da aber mein Trog keine planparallele Wand hatte, so musste ich zu andern Mitteln meine Zuflucht nehmen. Mit Hülfe

1) Sieg, Ueber die Bestimmung von Capillaritätsconstanten an Tropfen und Blasen. Diss. Berlin 1887.

einer scharfkantigen ebenen Platte wurde ein Theilstrich der Scala auf gleiche Höhe mit dem Rande des Schwimmers gebracht; dieser Theilstrich musste, das Auge wie oben gestellt, in demselben Moment zum ersten Mal sichtbar werden, in welchem  $\vartheta$  ein Rechter geworden war. Bei einiger Uebung kann man übrigens das Eintreten des rechten Winkels auch mit dem blossen Auge annähernd beurtheilen, wobei die Veränderungen der Meniscusreflexe die Schätzung erleichtern.

Die Berechnung unserer Versuche hätte, die Theorie als richtig vorausgesetzt, durch Combination der Gleichung:

$$\alpha = (G - r^2 \pi y (\sigma_1 - \sigma_2)) / (2r \pi \sin \vartheta),$$

wo  $G$  das scheinbare Gewicht der zur Erzeugung der capillaren Senkung  $y$  erforderlichen Massen ist<sup>1)</sup>, mit der Entwicklung  $V$  zu erfolgen. Da aber das Resultat der Versuche ein gegentheiliges ist, die geometrische Form der Oberfläche aber wahrscheinlich der Theorie entspricht, so wurde bei diesen Versuchen zweckmässig ein anderer Modus der Berechnung eingeschlagen. Aus den zu  $\vartheta = 90^\circ$  resp.  $\vartheta = \vartheta_n$  (wenn  $\vartheta = 90^\circ$  nicht beobachtet war) gehörigen Capillarhöhen wurde die Capillarconstante berechnet; unter Zugrundelegung dieser wurden bei den übrigen Versuchen einer Beobachtungsreihe aus den Capillarhöhen  $y$  die Winkel  $\vartheta$  ermittelt, und mit diesen nach der vorstehenden Gleichung ein neuer Werth von  $\alpha$  berechnet, der aber im Gegensatze zur Theorie, nie mit dem ersteren übereinstimmte.

In meiner Dissertation sind die zahlreichen Versuchsreihen zusammengestellt, welche sämmtlich dasselbe Verhalten zeigen.<sup>2)</sup> Ich kann mich jedoch darauf beschränken, zur Charakterisirung desselben eine einzige Beobachtungsreihe hierher zu setzen.

1) Eine kleine Wägungscorrection konnte hierbei vernachlässigt werden.

2) Vgl. die Tabellen in meiner Dissertation p. 34—40.



Schwimmer mit äusserem Halbmesser von 44,4829 mm, innerem von 41,2376 mm.

No.	$y$	$G$	$\vartheta$	$\bar{\alpha}$	Bemerkungen
1	0,8069	5644,6	16° 43'	7,981	$t = 16^\circ$
2	1,3318	9261,5	27 45	7,713	
3	1,7399	12019,3	36 22	7,652	$\vartheta = \vartheta_n$ geschätzt
4	1,9944	13788,1	42 3	7,597	
5	2,2705	15630,4	48 12	7,431	
6	2,6867	18360,1	57 46	7,285	} die Fläche durch die innere Kante des Schwimmers begrenzt.
7	3,1200	21170,1	68 11	7,032	
8	3,9399	22801,4	90	6,972	
9	4,1274	23689,5	95 31	6,552	
10	4,2364	24183,2	98 59	6,261	

Eine Belastung mit zwei weiteren — groben — Schrotkörnern von ca. 0,9 g Gewicht brachte den Schwimmer zum Sinken, ehe es zur Ablesung kam.

In der vorstehenden Tabelle bedeutet  $\bar{\alpha}$  die nach der Gleichung  $(G - r^2 \pi y (\sigma_1 - \sigma_2)) / (2r \pi \sin \vartheta)$  berechnete Grösse, die nach der Theorie mit dem aus  $y = 3,9399$  mm und  $\vartheta = 90^\circ$  berechneten Werthe von  $\alpha$  übereinstimmen sollte. Für letzteren ergibt sich 8,222<sup>1)</sup>, also ein ausnahmsweise grosser Werth, wie wir ihn nur in einigen Bestimmungen von Quincke sonst finden. Indess wird er durch Nr. 4 derselben Versuchreihe bestätigt, wo, wenn der Berechnung wirklich  $\vartheta = \vartheta_n$  zu Grunde gelegt worden wäre, ein noch grösserer Werth für  $\bar{\alpha}$  sich ergeben hätte. — Wir sehen, dass der Werth von  $\bar{\alpha}$  stetig abnimmt, dass also *das Gewicht, das nöthig ist, um eine bestimmte Depression  $y$  hervorzubringen, bei gegebener Oberflächenspannung kleiner ist als das theoretische*. Man könnte vermuthen, dass die Differenz  $\alpha - \bar{\alpha}$  für unendlich kleines  $y$  verschwindet; indess bemerke ich, dass das Ergebniss der anderen Versuche nicht derartig ist, um mit Sicherheit eine solche Behauptung aussprechen zu können. Gemeinsam ist allerdings den Versuchen eine durchschnittliche Abnahme von  $\alpha - \bar{\alpha}$  mit  $y$ .

Die vorstehenden Versuche beziehen sich auf — in Bezug auf die Luft — convexe Sattelflächen. Es war von Interesse, auch einige Versuche an concaven Sattelflächen

1) Die sämmtlichen sonst für  $\alpha$  gefundenen Werthe sind kleiner als 8.

anzustellen. Diese Versuche sind deshalb schwieriger, weil man hier zuerst den Schwimmer bis zum allseitigen Verschwinden des Meniscus belasten, um die richtige Vertheilung der Massen zu erzielen, und dann wieder einen Theil der Belastung aus dem Körper entfernen muss, um einen concaven Meniscus zu erhalten, wobei der Rand des Schwimmers horizontal bleiben soll. Letzteres durch directe Beobachtung mit dem Kathetometer festzustellen war bei der benutzten Anordnung nicht möglich, wenngleich es durch Hülfe einer passenden Vorrichtung leicht geschehen kann. Ich begnügte mich mit der Constatirung der Thatsache, dass, nachdem dieselbe Gewichtsmenge, die vorher aus dem Schwimmer entfernt war, wieder in ihn hineingebracht war, womit der betreffende Versuch zugleich sein Ende erreicht hatte, die Oberfläche keinen Meniscus mehr zeigte. Hierdurch war es wahrscheinlich gemacht, dass auch während der Versuche der Rand des Schwimmers hinlänglich horizontal geblieben war. Im übrigen waren schon wenige Beobachtungen ausreichend, um die Frage, zu deren Beantwortung sie angestellt waren, in dem Sinne zu entscheiden, dass — und zwar dies in Uebereinstimmung mit der Theorie — dasselbe Gewicht zur Beseitigung eines concaven wie zur Erzeugung eines convexen Meniscus von gleicher Höhe erforderlich ist.

Berechnet man die Versuche, bei denen  $\vartheta$  in der Nähe des rechten Winkels liegt, auf Grund der Theorie, so würde man einen Werth für  $\alpha$  finden, der von dem unter  $\alpha$  enthaltenen sehr wenig abweicht, aus dem rein mathematischen Grunde, dass  $\sin \vartheta$  in der Nähe von  $90^\circ$  von 1 um Grössen der zweiten Ordnung verschieden ist; ich bemerke dies, um jeden Einwand in dieser Beziehung von vornherein abzuschneiden.

Was ferner die Genauigkeit betrifft, mit der die Bestimmungstücke eines einzelnen Versuchs ermittelt werden können, so darf  $G$  als fehlerlos betrachtet werden, und  $y$  kann bis auf etwa 0,005 mm als richtig angenommen werden; ebenso sind, wie wiederholte Messungen derselben ergaben, auch die mittleren Durchmesser in maximo mit einer Unsicherheit von einigen Tausendteln eines Millimeters behaftet. Höchstens könnte es sich darum handeln, ob auch wirklich

die Flächen genau durch die äussere, resp. innere Kante begrenzt waren. Hierauf ist zu erwidern, dass, sobald einmal die Flüssigkeit die äussere Kante überschritten hat, sie in ganz kurzer Zeit bis zur inneren vordringt; dass andererseits die innere Kante vollständig ihren Zweck erfüllt, geht daraus hervor, dass der Schwimmer bei stumpfwinkeligem  $\vartheta$  Tage lang sich halten konnte, ohne unterzusinken. Endlich hätte man noch die Abweichung der Randkanten von einer geometrischen Linie in Betracht zu ziehen; indess die Erwägung, dass in die Finalgleichung der Theorie nur Volumina und keine einzelnen Linienelemente eingehen, zeigt, dass auch dieser Einwand widerlegt werden kann.

Bei den benutzten Gleichungen ist ferner  $h = 0$  vorausgesetzt worden, was ja in aller Strenge nur bei unendlicher Ausdehnung der Oberfläche der Fall ist. Allerdings liegt der Einfluss der Vernachlässigung von  $h$  gerade in Richtung der von uns beobachteten Abweichungen; indess konnte man sich sowohl durch Rechnung als auch durch den Versuch überzeugen — indem durch langsames Hineintropfen der Meniscus an der Wand des äusseren Gefässes fast zum Verschwinden gebracht wurde, ohne dass sich die geringste Aenderung des Versuchsergebnisses zeigte, trotzdem hierdurch  $h$  (und zwar exponentiell) verkleinert wird —, dass auch die Vernachlässigung von  $h$  das Versuchsergebnis nicht zu erklären vermag.

Die Hauptschwierigkeit liegt offenbar in der genauen Bestimmung von  $\vartheta = 90^\circ$ . Zwar stimmen die Ergebnisse für  $\vartheta = 90^\circ$  und  $\vartheta = \vartheta_n$ , soweit sich dies bei den angewandten Methoden erwarten liess<sup>1)</sup>, mit einander befriedigend überein, indess wäre es doch möglich, dass irgend eine mir verborgen gebliebene Fehlerquelle das Urtheil für  $\vartheta = \pi/2$  und  $\vartheta = \vartheta_n$  in demselben Sinne beeinflusst hätte. Ich will hiermit andeuten, in welcher Richtung weitere Untersuchungen über den Gegenstand, zu denen mir vorläufig die Gelegenheit fehlt, nach meiner Ansicht zu arbeiten hätten, um eine endgültige Entscheidung der angeregten Frage herbeizuführen. Die auf die Horizontirung der Schwimmer, resp. die genaue Bestimmung seiner etwaigen Neigung abzielenden

1) Vgl. Dissertation p. 41.

Maassnahmen lassen sich leicht noch bedeutend vervollkommen.

Es erübrigt noch, einige Worte über das Verhältniss unseres Versuchsergebnisses zu dem Wilhelmy'schen von ihm irrthümlich mit einer „Oberflächenverdichtung“ in Zusammenhang gebrachten hinzuzufügen. Wie eine leichte Ueberlegung zeigt, ergeben die Versuche an den concaven Sattelflächen scheinbar das entgegengesetzte Resultat. Man kann sie aber in Uebereinstimmung bringen, wenn man annimmt, dass die Differenz  $\alpha - \bar{\alpha}$  mit zunehmender Eintauchtiefe abnimmt. Die von Wilhelmy aus der tiefsten Eintauchung bei ebenen Glasplatten berechnete Capillariitätsconstante des Aethylalkohols, 2,615, die dann dem wahren Werth näher kommen müsste, ist noch kleiner als unser Mittelwerth und würde also nicht gegen eine solche Annahme sprechen. — Vermuthungsweise möchte ich noch aussprechen, dass man wenigstens qualitativ dieses Verhalten erklären könnte durch die Vorstellung, dass die Niveauflächen im Inneren der Flüssigkeit in der Nähe des festen Körpers im Sinne der freien Oberfläche, die doch auch eine Fläche gleichen Druckes ist, modificirt werden, ein Einfluss, der mit wachsender Tiefe abnehmen müsste. Analytisch würde sich dies vielleicht durch eine andere Form des Wirkungsgesetzes zwischen der Flüssigkeit und dem festen Körper ausdrücken. Allerdings steht eine derartige Anschauung mit den bisher gültigen Vorstellungen über die Capillarkräfte in Widerspruch.

Hrn. Gustav Hanseemann und Hrn. Geh. Rath Liebreich, welche mir durch ihre gütige Unterstützung die Ausführung der vorliegenden Arbeit ermöglichten, erlaube ich mir meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Berlin, November 1890  
Juni 1891.

IV. *Ueber die Dämpfung schneller electrischer Schwingungen;*  
*von V. Bjerknes aus Christiania.*

(Hierzu Taf. I Fig. 6–10.)

1. Die schnellen electrischen Schwingungen, welche infolge eines wirksamen Funkens erst im primären, dann im secundären Stromkreise auftreten, sind nach kurzer Zeit wieder vollständig verschwunden. Ehe das Inductorium Zeit hat, einen neuen Funken zu erzeugen, muss schon längst Gleichgewicht eingetreten sein. Einfache Ueberlegungen machen dies jedenfalls sehr wahrscheinlich. So beträgt in den folgenden Versuchen die Schwingungszahl etwa 30 Millionen in der Secunde: der Unterbrecher bewirkt in derselben Zeit 42 Contacte. Zwischen zwei Funken können also mehr als 700 000 Schwingungen ohne neue Energiezufuhr ablaufen. Bei Pendeln oder Stimmgabeln genügt dies zum vollständigen Absterben der Bewegung, selbst wenn man jeden Widerstand möglichst entfernt. Bei den electrischen Schwingungen liegen in der Energieausstrahlung und dem Widerstande kräftigere Ursachen der Dämpfung vor, und das Gleichgewicht muss sich in beiden Stromkreisen nach einer viel geringeren Anzahl von Schwingungen herstellen.

Die Kenntniss der Gesetze für das Absterben der electrischen Schwingungen ist in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Denn erstens lassen sich aus der Annahme einer hinlänglich starken Dämpfung der primären Schwingungen die bekannten Resultate der Herren Sarasin und de la Rive, die sogenannte multiple Resonanz, theoretisch ableiten, was ich in einer folgenden Abhandlung zeigen werde. Andererseits können Untersuchungen über die Dämpfung ein Licht werfen auf die Frage von der Energieausstrahlung und weiter können sie die Berechnung des Widerstandes gegen diese schnell wechselnden, nur in den äusseren Schichten kreisenden Ströme ermöglichen.

2. In dem Folgenden mache ich den Versuch, einen Werth für die Dämpfung im primären Stromleiter aus der

Schärfe der Resonanzerscheinung abzuleiten. Je mehr Schwingungen nämlich im primären Leiter einander folgen, desto mehr derselben werden auch bei vorhandener Resonanz ihre Wirkung im secundären Leiter verstärken können. Aus dem Maasse also, in welchem die Wirkung bei vorhandener Resonanz die Wirkung bei nicht vorhandener Resonanz übertrifft, ist ein Rückschluss auf die Zahl der Schwingungen des primären Leiters möglich. Vorausgesetzt ist dabei allerdings, dass die Dämpfung des secundären Leiters verhältnissmässig klein sei. Dies wird aus verschiedenen Betrachtungen und Versuchsergebnissen wahrscheinlich gemacht.

Für solche Leser, welche sich für die Einzelheiten weniger interessiren, möchte ich schon hier das Ergebniss meiner Versuche mittheilen. Ich finde, dass unter den üblichen Verhältnissen die Dämpfung des primären Leiters sehr stark ist. Jede Elongation beträgt höchstens 0,77 der vorhergehenden Elongation nach derselben Seite. Für den bestimmten Fall, auf welchen sich meine besten Versuche beziehen, gibt die Fig. 9 ein Bild des zeitlichen Ablaufs der Schwingungen in der üblichen Weise. Die Figuren 10<sub>a</sub> und 10<sub>b</sub> veranschaulichen in derselben Weise die Schwingungen im secundären Stromkreise, wenn die Eigenschwingungen derselben gleich schnell (a) oder um  $\frac{1}{10}$  schneller (b) als die des primären Leiters ablaufen.

Die Arbeit wurde im Laufe des Wintersemesters in dem hiesigen physikalischen Institut ausgeführt. Die Grundzüge der Methode, sowie viele werthvolle Winke bei den Einzelheiten der Ausführung verdanke ich Hrn. Prof. Hertz. Auch will ich nicht unterlassen, zu erwähnen, dass ich bei diesen Arbeiten viel Nutzen aus den Vorlesungen des Hrn. Poincaré über Electrodynamik gezogen habe. Diese Vorlesungen, die ich im Sommersemester 1890 hörte, sind jetzt in Druck erschienen.<sup>1)</sup> Mit den in der nachträglich hinzugefügten Note V l. c. p. 247 ausgesprochenen Gedanken wird man wesentliche Uebereinstimmungen finden.

1) H. Poincaré, *Electricité et Optique II*. Paris 1891. Georges Carré, Editeur.

## I. Die Instrumente und die Vorversuche.

3. Ein vollständiges Bild der Resonanzerscheinungen erhält man durch eine *Messung der Intensität der secundären Schwingungen bei verschiedenen bekannten Verhältnissen zwischen der Schwingungsdauer der beiden Stromkreise*. Diese Intensität lässt sich aus der Länge des secundären Funkens abschätzen, aber vortheilhafter ist die Anwendung eines neuen Hilfsmittels: der durch die electricischen Schwingungen hervorgegerufenen mechanischen Kräfte.<sup>1)</sup>

4. Die allgemeine Aufstellung bei dieser Intensitätsmessung ersieht man aus Fig. 6.

Der primäre Stromleiter  $CC'$  ist, abgesehen vom Inductorium, ein Umdrehungskörper. Jede der Capacitäten  $CC'$  ist eine kreisförmige Scheibe aus Zinkblech, 40 cm im Durchmesser, auf einem hölzernen Fusse festgenagelt und im Mittelpunkte mit einer Polschraube zum Einklemmen der Leitungsdrähte versehen. Diese bestehen aus 2 mm starken Kupferdrähten von verschiedener Länge, je nach der gewünschten Schwingungsdauer. Die Funken springen über zwischen Messingkugeln von 2 cm Radius, oder zwischen kleinen Kugelschalen von 1 cm Radius. Meistens wurde ein kleines, durch zwei kleine Accumulatoren gespeistes Inductorium benutzt. Einige Versuche wurden auch mit einem grossen Ruhmkorff mit Quecksilberunterbrecher gemacht, welcher durch fünf Accumulatoren erregt wurde. Das Inductorium wurde immer möglichst nahe gestellt, die Zuleitungsdrähte waren kurz und dünn und in kleinen Löchern auf der Rückseite der Kugeln befestigt.

Der secundäre Stromkreis bestand aus 2 mm starkem Kupferdraht, welcher ein Quadrat von 60 cm Seitenlänge bildete und war genau in einer Meridianebene des primären Leiters aufgestellt, 50 cm von demselben entfernt. Die Seite  $a$  konnte zur Aenderung der Schwingungsdauer durch andere ersetzt werden. Bei  $E$  war der secundäre Kreis unterbrochen; hier war eine Art von Electrometer für die erwähnte Intensitätsmessung eingeschaltet.

1) H. Hertz, Wied. Ann. 42, p. 407. 1891.



5. Infolge der Electricitätsbewegung ist der eine Pol positiv, der andere negativ, oder umgekehrt. Ein in dem Zwischenraum aufgehängter kleiner Leiter wird durch Influenz in einer entsprechend wechselnden Weise electricisirt und also von beiden Polen angezogen. Sehr zweckmässig ist es, den Polen die Gestalt von Quadranten, die diametral einander gegenüber liegen, zu geben, und den kleinen Leiter in der bekannten Sektorenform einer Electrometernadel herzustellen. (Siehe Fig. 7.)

Die Quadranten hatten, inwendig gemessen, 3 cm Radius und 1,6 cm Höhe, der kleinste Abstand zwischen Nadel und Quadrant betrug 0,8 cm. Bei diesem Abstand sprangen nie sichtbare Funken über, doch trat bisweilen Electricisirung der Nadel ein, was sich sogleich durch eine Verlegung des Nullpunktes zu erkennen gab. Die Beobachtung wurde dann verworfen und die Nadel durch Berührung entladen. Zum Aufhängen diente ein 2 cm langer Quarzfaden, die Nadel selbst war aus dünn ausgewalztem Aluminium und hatte einen Spiegel, dessen Ablenkung mit Fernrohr und Scala beobachtet wurde. Vom Platz am Fernrohr aus liess sich mittelst Fäden das Inductorium in Gang setzen. Es wurde immer der erste Ausschlag beobachtet, da sich dieser als ziemlich constant erwies, während bei fortgesetztem Gange des Inductoriums eine dauernde Ruhelage nicht erreicht wurde. Der Ausschlag betrug bei Resonanz meistens 30—40 Scalentheile. Zum Vergleich kann dienen, dass der Ausschlag für 20 Daniell-Elemente 19 Scalentheile war.

Das Electrometer steht, wie man aus Fig. 6 sieht, in der gemeinschaftlichen neutralen Ebene der zwei Stromkreise. Bei dieser Aufstellung konnte ich keine Ablenkung durch electrostatische Influenz beobachten; als Controle wurden die Kugeln so weit auseinander gezogen, dass keine Funken mehr übersprangen, es trat dann keine Ablenkung ein. Nur bei sehr schiefer Aufstellung zeigten sich diese Ausschläge; die Anwendung von Schutznetz war deshalb überflüssig.

6. Zur Veränderung der Schwingungsdauer des secundären Kreises wurden neun verschiedene Drähte *a* hergestellt. Der erste war gerade, die folgenden hatten in der Mitte eine gleichmässig zunehmende Anzahl Spiralwindungen; der mitt-

lere (Nr. 5) 10, der letzte (Nr. 9) 20. Alle waren aus 2 mm starkem Kupferdraht, Radius und Ganghöhe der Spiralen betrug etwa 2 cm. Die Gesamtlängen der secundären Kreise Nr. 1, 5 und 9 waren 240, 320 und 400 cm.

Durch Einschalten von geraden Drähten verschiedener Länge zwischen die Capacitäten und die Kugeln konnte der primäre Leiter in Resonanz mit irgend einem dieser neun secundären Kreise gebracht werden. Mittelst der Ausschläge im Electrometer konnten die entsprechenden Drahtlängen bis auf 1 cm genau bestimmt werden. Abstimmung nach den Kreisen 1, 5 und 9 wurde vorgenommen und die entsprechenden Längen  $L$  des primären Leiters, wenn von  $C$  bis  $C'$  gemessen, gleich 164, 204 und 246 cm gefunden. Auf den mittleren von diesen Werthen,  $L = 204$  cm, bezieht sich die Untersuchung.

7. Die einzelne Schwingungsdauer wurde durch Messen von Drahtwellen ermittelt. Da es nur auf die Verhältnisszahlen ankommt, ist die vielleicht noch nicht entschiedene Frage von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs Drähten hier von keinem Einfluss.

Der secundäre Kreis mit dem Electrometer war nicht leicht an einem Draht entlang zu verschieben. Es wurde deshalb ein zweiter beweglicher Kreis verfertigt, hierin die Spirale Nr. 5 eingeschaltet, und die Resonanz mit dem principalen primären Leiter durch Aenderung der Capacitäten an den Drahtenden hergestellt. Die Abstimmung geschah in gewöhnlicher Weise durch Beobachtung der secundären Funken; diese Methode gewährt zwar keine grosse Genauigkeit, doch ist auch hier ein Fehler nur für die absoluten Wellenlängen von merkbarem Einfluss, nicht für die Verhältnisszahlen. In diesem beweglichen Secundärkreise wurden nacheinander die Drähte Nr. 1, 5 und 9 eingeschaltet, und die von dem entsprechenden primären Leiter,  $L = 164, 204, 246$  cm erzeugten Wellen gemessen. Die Messung wurde also immer bei Resonanz vorgenommen; hierdurch eliminiren sich die Fehler, die durch die Erscheinung der „multiplen Resonanz“<sup>1)</sup> eintreten können, und man findet die gemein-

1) Sarasin u. de la Rive, Arch. des scienc. phys. et nat. 28. p. 113. 1890.

schaftlichen Wellenlängen  $\lambda$  des benutzten primären und secundären Kreises. Die Resultate aus einer grösseren Anzahl Messungen waren:

Secundär Nr.	1	5	9
Primär	$L_1 = 164$	$L_5 = 204$	$L_9 = 246$
Wellenlänge	$\lambda_1 = 385,7$	$\lambda_5 = 443,0$	$\lambda_9 = 499,5$

Die gemeinschaftliche Schwingungsdauer  $T_5$  des mittleren primären Leiters und des entsprechenden secundären wähle ich als Zeiteinheit. Dann wurden für die Kreise 1 und 9:

$$x_1 = \frac{T_1}{T_5} = \frac{\lambda_1}{\lambda_5} = 0,873, \quad x_9 = \frac{T_9}{T_5} = \frac{\lambda_9}{\lambda_5} = 1,128.$$

Hieraus wurde durch Interpolation folgende Tabelle (I) der relativen Schwingungsdauer  $x = T_n/T_5$  für sämtliche neun secundäre Kreise berechnet:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(I)	$x = 0,873$	0,904	0,936	0,968	1	1,032	1,064	1,096	1,128

## II. Versuchsergebnisse.

8. Für die Intensität der secundären Schwingungen hat man ein relatives Maass in den Electrometerausschlägen  $E_n$ . Diese können jetzt bei den oben bestimmten neun Werthen der relativen Schwingungsdauer  $x_n$  beobachtet werden, indem man den mittleren primären Leiter,  $L = 204$  cm, unverändert lässt und die neun verschiedenen Drähte  $a$  in den secundären Kreis einschaltet. Als Beispiel kann folgende Beobachtungsreihe angeführt werden:

$x_n = 0,873$	0,904	0,936	0,968	1	1,032	1,064	1,096	1,128
$E_n = 5$	7,3	11,7	22,0	39,9	23,3	8,6	4,8	2,1

Trägt man die Schwingungsdauern als Abscissen, die Electrometerausschläge als Ordinaten auf, so erhält man eine Curve, die für die Abscisse 1, also bei gleicher Schwingungsdauer, ein sehr hervortretendes Maximum hat.

Zwei gleich nacheinander genommene Beobachtungsreihen gaben meistens bis auf ein paar Procent dieselben Zahlen. Aber bei verschiedener Anordnung schwankte die Intensität. Um dann die verschiedenen Curven miteinander vergleichen zu können, habe ich alle Ordinaten so reducirt, dass das Maximum die Höhe 1 erhielt, was einfach durch Division sämtlicher Electrometerausschläge durch den Ausschlag

bei Resonanz geschieht. Diese Zahlen,  $y = E_n/E_s$  sind in den folgenden Tabellen aufgeführt.

9. Mit dem kleinen Inductorium und Funken von 1 bis 2 mm Länge zwischen Messingkugeln wurden folgende Zahlen gefunden als Mittel aus acht Beobachtungsreihen:

(II)	$x = 0,873$	0,904	0,936	0,968	1	1,032	1,064	1,096	1,128
	$y = 0,116$	0,186	0,306	0,583	1	0,60	0,224	0,128	0,062

Diese Curve ist in Fig. 8 stark aufgetragen, aber mit sämtlichen Ordinaten auf die Hälfte reducirt, da sonst die Curve zu scharf wird.

Viel grössere Funkenlängen waren bei dieser Anordnung nicht zu erreichen. Dagegen gelang es, als die Kugeln durch kleine Kugelschalen von 1 cm Radius ersetzt wurden. Jede Zeile in der folgenden Tabelle ist Mittel aus vier Beobachtungsreihen. In der ersten Verticalcolumnne stehen die Längen des primären Funkens in Millimetern.

(III).

	0,873	0,904	0,936	0,968	1	1,032	1,064	1,096	1,128
1	0,14	0,20	0,30	0,59	1	0,68	0,27	0,13	0,076
2	0,15	0,21	0,34	0,65	1	0,71	0,33	0,15	0,087
3	0,16	0,23	0,34	0,69	1	0,75	0,35	0,17	0,096
4	0,19	0,25	0,37	0,70	1	0,74	0,37	0,20	0,103
5	0,24	0,31	0,47	0,78	1	0,82	0,43	0,22	0,124

Diese Curven stimmen im allgemeinen Verlauf gut mit der in Fig. 8 aufgetragenen überein, nur werden sie bei wachsender Funkenlänge allmählich stumpfer. Letzteres setzt sich bei weiterem Steigen der Funkenlänge über 5 mm fort, aber die Erscheinungen wurden hier an der Grenze der Leistungsfähigkeit des Inductoriums sehr unregelmässig.

10. Mit dem grossen Inductorium erhielt ich Resultate, die im allgemeinen mit den obigen übereinstimmten, nur waren die Erscheinungen bei weitem unregelmässiger. Die Curven erschienen meistens etwas weniger scharf, aber die Abnahme der Schärfe bei wachsender Funkenlänge war auch langsamer. Noch bei 8 mm habe ich gelegentlich sehr deutlich ausgebildete Resonanzcurven erhalten, ungefähr wie die letzte in der Tabelle III.

## III. Zur Theorie des secundären Kreises.

11. Zur Darstellung des Vorgangs im secundären Kreise benutze ich die Gleichung für das gedämpfte Pendel, welches durch eine gedämpfte periodische Kraft in Bewegung gesetzt wird. Es sei  $q$  der Parameter, durch welchen der Abstand vom Gleichgewicht angegeben wird, sagen wir der Potentialunterschied zwischen den zwei Polen. Dann ist:

$$(1) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + (b^2 + \beta^2) q = \mathfrak{A} e^{-\alpha t} \cos at.$$

Die Kraft auf der rechten Seite rührt von dem primären Stromkreise her. Wie gewöhnlich ist:

$$(1') \quad a = \frac{2\pi}{T}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{T},$$

wo  $T$  die Schwingungsdauer und  $\gamma$  das logarithmische Decrement der primären Schwingungen bedeutet. Die Wahl des Cosinus ist so begründet: die Schwingungen sollen zur Zeit  $t = 0$  anfangen; in diesem Augenblicke besteht im umgebenden Raume eine electrostatische Kraftvertheilung. Die erste Schwankung fängt damit an, dass in der Nähe vom primären Leiter diese Kraft abfällt, was durch den Cosinus ausgedrückt ist. In grossen Entfernungen wird das Verhältniss dagegen ein anderes, indem die electrostatische Kraftvertheilung umgekehrt wie die dritte, die sich fortpflanzende Welle umgekehrt wie die zweite Potenz der Entfernung abnimmt.

Der Form nach ist (1) identisch mit der bekannten von Thomson für electrische Schwingungen aufgestellten Gleichung. Aber wir verzichten hier auf die Darstellung der Coëfficienten durch Capacität, Selbstpotential und Widerstand des Stromkreises. Vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie aus sind Capacität und Selbstpotential nur für statische und stationäre Zustände streng definirte Begriffe. Erfahrungsmässig sind sie auch zur Darstellung hinlänglich langsamer dynamischer Vorgänge brauchbar, aber bis zu welcher Grenze ist bisher weder theoretisch noch experimentell festgestellt worden.

Es sei zuletzt noch bemerkt, dass die Gleichung (1) nicht ein vollständiges Bild der Electricitätsbewegung im secun-

dären Stromkreise geben soll. Dies kann nur eine partielle Differentialgleichung leisten, in welcher zugleich eine oder mehrere Coordinaten als unabhängige Variable vorkommen. Die Gleichung (1) beruht deshalb auf der Hypothese, dass die Bewegung im secundären Kreise hinlänglich einfach ist, um in Bezug auf Schwingungsdauer und Dämpfung durch die Bewegung eines Einzeltheilchens repräsentirt werden zu können.

12. Das allgemeine Integral dieser Gleichung findet man nach allgemein bekannten Methoden:

$$(2) \quad q = A e^{-\alpha t} \sin (at + a') + B e^{-\beta t} \sin (bt + b'), \quad \text{wo:}$$

$$(2_1) \quad A = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{(b^2 + (\alpha - \beta)^2 - a^2)^2 + 4a^2(\alpha - \beta)^2}}, \quad a' = \arctg \frac{a^2 - (\alpha - \beta)^2 - b^2}{2a(\alpha - \beta)}.$$

Vorzeichen und Quadranten können auf folgende Weise bestimmt werden:  $A$  hat dasselbe Vorzeichen wie  $\beta - \alpha$ ;  $a'$  liegt zwischen  $+\pi/2$  und  $-\pi/2$ .

Gleichung (2) zeigt, dass die Bewegung im secundären Stromkreise sich darstellen lässt als eine Superposition von zwei Schwingungen.

Die ersteren sind gewissermaassen *gezwungene Schwingungen*; die entsprechende Schwingungsdauer und Dämpfung ist die des primären Leiters; die Amplitude  $A$  und die Epoche  $a'$  sind direct durch die Constanten der Differentialgleichung gegeben.

Die zweiten sind *freie Eigenschwingungen*, die mit der dem secundären Kreise eigenen Schwingungsdauer und Dämpfung ablaufen. Die Amplitude  $B$  und die Epoche  $b'$  dieser Schwingungen sind Integrationsconstanten, die erst durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Im Anfangsaugeblicke befindet sich der secundäre Kreis im Gleichgewicht. Dies gibt:

$$t = 0, \quad q = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(2_2) \quad \begin{cases} B = \frac{\mathfrak{A} \sqrt{b^2 + (\alpha - \beta)^2}}{b \sqrt{(b^2 + (\alpha - \beta)^2 - a^2)^2 + 4a^2(\alpha - \beta)^2}}, \\ b' = \arctg \frac{b}{\alpha - \beta} \frac{a^2 - (\alpha - \beta)^2 - b^2}{a^2 + (\alpha - \beta)^2 + b^2}, \end{cases}$$

wo  $B$  im Vorzeichen  $A$  entgegengesetzt ist und  $b'$  zwischen  $\pi/2$  und  $-\pi/2$  liegt.

#### IV. Berechnung der Resonanzcurve in erster Annäherung.

13. Ich benutze von jetzt an die in der Einleitung erwähnte Voraussetzung, dass die Schwingungen im primären Stromkreise bedeutend stärker gedämpft sind als diejenigen im secundären. Mehrere Gründe machen diese Annahme sehr wahrscheinlich.

Im primären Kreise liegen, soweit wir es übersehen können, die kräftigsten Ursachen der Dämpfung vor. Erstens muss die daselbst vorhandene Funkenstrecke einen bedeutenden Zuschlag zu dem Widerstand geben. Freilich darf diese Ursache nicht überschätzt werden. Gewöhnlichen Strömen gegenüber wäre der Widerstand in den kurzen Kupferdrähten ganz gegen denjenigen in der Funkenstrecke zu vernachlässigen; aber dies ist vielleicht hier nicht mehr der Fall, wo die Ströme nur in dünnen Oberflächenschichten kreisen. Zweitens muss die Energieausstrahlung von einem offenen Leiter wie dem primären grösser ausfallen, als von einem fast geschlossenen wie dem secundären; in welchem Maasse kann allerdings erst eine vollständige Durchführung der Aufgabe nach der Maxwell'schen Theorie entscheiden.

Andererseits erlaubt diese Hypothese, wenn einmal zugelassen, eine Bestimmung der Dämpfung in beiden Stromkreisen, wie ich es in dem Folgenden zeigen werde. Für den secundären Kreis hat die Messung allerdings keinen grossen quantitativen Werth, aber sie bestätigt doch durchaus unsere Annahme.

In mathematischer Form besagt diese Hypothese, dass in unseren Formeln (2)  $\alpha$  gross gegen  $\beta$  sei.

14. Mit den Schwingungen im primären Leiter sterben die gezwungenen Schwingungen im secundären hin; die Eigenschwingungen bleiben dagegen, und die Gl. (2) reducirt sich nach kurzer Zeit auf:

$$(3) \quad q = B e^{-\beta t} \sin(bt + b'),$$

wo  $B$ , durch Vernachlässigung von  $\beta$  neben  $\alpha$ , sich reducirt auf:



$$(3_1) \quad B = \frac{\Re \sqrt{b^2 + a^2}}{b \sqrt{(b^2 + a^2 - a^2)^2 + 4a^2a^2}}.$$

Diese Formel erlaubt gleich eine obere Grenze für  $\alpha$  zu finden. Die Resonanzerscheinung beruht darauf, dass die Grösse unter der Wurzel im Nenner ein Minimum hat. Dies findet statt, wenn:

$$b = \sqrt{a^2 - a^2} \quad \text{oder} \quad a = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Dieses Minimum, und also jede Spur von Resonanz, verschwindet, wenn  $\alpha > a$  oder  $a > b$ . In den Versuchen haben wir implicite vorausgesetzt, dass die grösste Resonanz bei gleicher Schwingungsdauer,  $b = a$ , stattfinde. Hiernach darf  $\alpha^2$  neben  $a^2$  oder  $b^2$  vernachlässigt werden. Benutzt man dies in der Gl. (3<sub>1</sub>), so erhält man etwas vereinfacht:

$$(3_2) \quad B = \frac{\Re}{\sqrt{(b^2 - a^2)^2 + 2a^2(b^2 + a^2)}}.$$

Eine beliebig grosse Dämpfung kann also nach unserer Methode nicht ohne weiteres gefunden werden. Die Vernachlässigung von  $\alpha^2$  gegen  $a^2$  entspricht nach den Relationen (1') der Vernachlässigung von  $\gamma^2$  gegen  $4\pi^2$ . Für  $\gamma = 1$  steigert sich der entsprechende Fehler zu etwas mehr als 2 Proc. Dies entspricht Schwingungen, in denen das Verhältniss zweier aufeinander folgenden Elongationen nach derselben Seite  $1/e = 0,37$  beträgt.

15. Auf die Electrometernadel wirkt jederzeit eine Kraft proportional  $q^2$ . Im Zeitelement gibt dies einen Impuls  $q^2 dt$ . Bei der Berechnung der totalen Impulse  $J$  können wir ohne merklichen Fehler die Integration bis  $t = \infty$  erstrecken. Denn, wie in der Einleitung bemerkt, können, ehe das Inductorium wieder neue Schwingungen erzeugt, hunderttausende von Schwingungen ablaufen, und dies genügt zu einem vollständigen Absterben der Bewegung. Also:

$$(4) \quad J = \int_0^{\infty} q^2 dt.$$

Nach jedem wirksamen Funken im primären Stromkreise erhält also die Nadel einen solchen Impuls, und die Electrometerausschläge  $E$  werden proportional  $J$ .

Setzt man hier den Werth (3) von  $q$  ein und integrirt,

so erhält man mit Nichtberücksichtigung eines Correctionsgliedes, das sich nur bei extrem grossen Werthen der Dämpfung  $\beta$  geltend macht:

$$(4_1) \quad J = \frac{B^2}{4\beta}.$$

Diese Formel wird später zur Bestimmung von  $\beta$  benutzt. Um die Resonanzcurve zu berechnen, führen wir den Werth  $(3_2)$  von  $B$  ein:

$$(4_2) \quad J = \frac{B^2}{4\beta} \cdot \frac{1}{(b^2 - a^2)^2 + 2a^2(b^2 + a^2)}.$$

Für  $a = b$  hat  $J$  seinen Maximalwerth:

$$(4_3) \quad J_m = \frac{B^2}{4\beta} \cdot \frac{1}{4a^2a^2}.$$

Wegen der Proportionalität zwischen den Impulsen  $J$  und den Electrometerrausschlägen  $E$  ist:

$$y = \frac{E_n}{E_s} = \frac{J}{J_m}, \quad \text{das heisst:} \quad y = \frac{4a^2a^2}{(b^2 - a^2)^2 + 2a^2(b^2 + a^2)}.$$

Als Abscisse für die experimentellen Resonanzcurven haben wir  $x = T_n/T_s = a/b$  benutzt. Weiter führen wir ein das logarithmische Decrement  $\gamma$ ,  $\gamma = a/T = 2\pi \cdot a/a$ . Dann kommt als Gleichung für die Resonanzcurve:

$$(5) \quad y = \frac{2\gamma^2 x^4}{2\pi^2(1 - x^2)^2 + \gamma^2(1 + x^2)x^2}.$$

Man sieht gleich, dass diese Curve für  $x = 1$  ein Maximum  $y = 1$  hat, wie es mit der experimentellen Curve der Fall war. Die Gleichung enthält einen Parameter, das logarithmische Decrement  $\gamma$ ; mit abnehmendem Werthe desselben tritt das Maximum immer schärfer hervor.

Auflösung nach  $\gamma^2$  ergibt:

$$(5_1) \quad \gamma^2 = \frac{2\pi^2(1 - x^2)^2 y}{2x^4 - (1 + x^2)x^2 y}.$$

#### V. Die Dämpfung der primären Schwingungen.

16. Aus den Tabellen (II) und (III) kann man  $x$  und das entsprechende  $y$  in die obige Formel  $(5_1)$  einsetzen und den entsprechenden Werth von  $\gamma$  berechnen.

Als Mittelwerth aus der Tabelle (II), die aus den besten Versuchen hervorgegangen ist, ergibt sich:

$$(IV) \quad \gamma = 0,26.$$

Dies ist überhaupt der kleinste gefundene Werth des logarithmischen Decrementes. Folgendes veranschaulicht die entsprechenden Schwingungen: die erste Elongation sei 1; dann ist die zweite Elongation nach derselben Seite 0,77, die zehnte 0,07. Nach 30 Schwingungen, das heisst nach dem Verlauf von einer Milliontel Secunde, sind die Elongationen auf etwa 0,0,4 herabgesunken. Graphisch ist diese Schwingung in Fig. (9) für den Zeitraum einer halben Milliontelsecunde dargestellt.

17. Aus der Tabelle (III) ergeben sich bei den entsprechenden Längen  $l$  des primären Funkens folgende Mittelwerthe für das logarithmische Decrement:

(V)	$l = 1$	2	3	4	5 mm
	$\gamma = 0,27$	0,30	0,31	0,33	0,39

Diese Zahlen bezeugen eine allmählich steigende Dämpfung, ohne Zweifel eine Folge des grösseren Widerstandes der langen Funken. Schon bei 1 und 2 mm Funkenlänge scheint die Dämpfung etwas grösser als in den obigen Versuchen, vielleicht ein Zeugniß dafür, dass die etwas kräftigeren Funken zwischen den Kugeln bessere Leiter waren, als die etwas schwächeren zwischen den kleinen Kugelschalen. Eine einfache Relation zwischen der Länge des primären Funkens und der Dämpfung scheint nicht zu bestehen. Mit kräftigen, 8 mm langen Funken von dem grossen Ruhmkorff fanden sich noch logarithmische Decremente von etwa 0,4, aber die Erscheinungen waren hier, wie erwähnt, sehr unregelmässig.

Das grösste mit Sicherheit constatirte logarithmische Decrement,  $\gamma = 0,39$ , entspricht Schwingungen, wo die erste, zweite und zehnte Elongation nach derselben Seite 1, 0,68 und 0,02 betragen.

18. Einer eigenthümlichen Abweichung zwischen den Ergebnissen der Theorie und der Versuche ist noch zu erwähnen. Die einzelnen Zahlen, aus denen die obigen Mittelwerthe des logarithmischen Decrementes berechnet sind, weichen in systematischer Weise voneinander ab. Aus der Tabelle II findet man zum Beispiel folgende acht einzelne Werthe:

$x = 0,873$	0,904	0,936	0,968	1,032	1,064	1,096	1,128
$\gamma = 0,36$	0,34	0,30	0,26	0,23	0,20	0,20	0,18

Mit wachsendem  $x$  erhält man also ziemlich gleichmässig abnehmende Werthe des logarithmischen Decrementes. Von dem Mittelwerthe weichen die äussersten um fast 40 Proc. ab. Die dem Mittel 0,26 entsprechende theoretische Curve ist in Fig. 8 punktirt. Wie man sieht, folgen sich die Curven in der Nähe vom Resonanzpunkte ziemlich genau. Aber links steigen in allmählichem Fortschreiten die Ordinaten der experimentellen Curve über diejenigen der theoretischen Curve hinaus, rechts dagegen sinken sie in demselben Verhältniss. Diese Erscheinung hat sich mit grosser Regelmässigkeit bei sämmtlichen Beobachtungsreihen wiederholt.

Qualitativ lässt sich die Erscheinung erklären durch den zunehmenden Widerstand und die entsprechend zunehmende Dämpfung im secundären Kreise, wenn man die Spirale einschaltet. In der Rechnung haben wir implicite  $\beta = \text{const.}$  vorausgesetzt, und deshalb ist  $+\beta$  bei Division der Gleichungen (4<sub>2</sub>) und (4<sub>3</sub>) ausgefallen. Man überzeugt sich in der That leicht davon, dass die Electrometerausschläge empfindlich sind gegen das Einschalten von Widerständen, die nicht gleichzeitig die Schwingungsdauer beeinflussen. Aber erst eine quantitative Untersuchung kann die Frage vollständig erledigen.

Ist jedoch diese Erklärung richtig, so muss wegen der Symmetrie sich der Fehler eliminiren, wenn man das Mittel nimmt, und die oben angegebenen Mittelwerthe bleiben richtig.

#### VI. Ueber die Schwingungen im secundären Stromkreise.

19. Sofern man aus der Länge des secundären Funkens auf den zwischen den Polen des secundären Kreises vorhandenen absoluten Potentialunterschied schliessen darf, so gestattet die Formel (4<sub>1</sub>) eine einfache Schätzung der Dämpfung der secundären Schwingungen.

In der Secunde kommen  $p$  Impulse  $J$ , je einer für jeden Contact des Unterbrechers; der entsprechende Electrometerausschlag sei  $E$ . Andererseits gibt ein constanter Potentialunterschied  $V$  einen Ausschlag  $E'$ . Für die Ablenkung der Nadel ist also ein Impuls  $J$  gleichwerthig mit  $EV^2/E'p$ . Führt man dies in die Formel (4<sub>1</sub>) ein und löst man nach  $\beta$  auf, so erhält man:

$$(6) \quad \beta = \frac{p E' B^2}{4 E V^2}.$$

Wie früher schon erwähnt, entspricht  $V = 20$  Volt dem Electrometerausschlag  $E' = 19$ ; weiterhin war  $p = 42$ . Also:

$$\beta = 0,5 \frac{B^2}{E}.$$

Die Electrometerausschläge  $E$  wurden in der üblichen Weise genommen, nur wurde immer bei Resonanz, also mit dem secundären Kreis Nr. 5 gearbeitet. Sonst entsprach die Anordnung vollständig derjenigen bei den Versuchen zur Tabelle (II).  $E$  wurde im Mittel gleich 30 gefunden. Die entsprechenden Funkenlängen wurden mittelst eines kleinen, zwischen die Quadranten eingeschalteten Funkenmikrometers, mit Kugeln von 0,25 cm Radius, gemessen.

Diese Messung wurde immer bei möglichst kurzer Beobachtungszeit vorgenommen. Wartet man länger, so erscheinen dann und wann lange Funken, die besonders wirksamen primären Funken entsprechen. Sehr gross wird diese Ungleichmässigkeit, wenn man eine grosse primäre Funkenstrecke benutzt. Diese einzelnen langen Funken übersteigen sehr den Mittelwerth und würden deshalb den vom Mittelwerthe abhängigen Electrometerausschlägen schlecht entsprechen. Im Mittel wurde eine Funkenlänge von 0,3 mm gefunden, und der entsprechende Potentialunterschied ist nach den Beobachtungen von Paschen<sup>1)</sup>  $B = 2080$  Volt. Hieraus ergibt sich:

$$\beta = 70000.$$

Das logarithmische Decrement ist  $\delta = \beta T$ . Aus der halben Wellenlänge,  $\lambda_g = 443$  cm, findet man, unter Voraussetzung von Lichtgeschwindigkeit,  $T = 3 \cdot 10^{-9}$ , woraus:

$$\delta = 0,002.$$

Die Dämpfung wäre hiernach mehr als hundertmal kleiner als im primären Stromkreise, und die Vernachlässigung der gezwungenen Schwingungen in Gleichung (2) wäre durchaus zulässig. Die entsprechende Verhältnisszahl zweier Elongationen nach derselben Seite ist 0,998. Erst nach mehr als 1000 Schwingungen sind die Ausschläge auf ein Zehntel herabgesunken. Zum Vergleich diene, dass man bei guten

1) F. Paschen, Wied. Ann. 37. p. 79. 1889.

Secundenpendeln noch ein zehn oder zwanzig Mal kleineres Decrement findet.

Aber, selbst abgesehen von der Unvollkommenheit der Methode in quantitativer Hinsicht, ist es sehr zweifelhaft, welchen Werth man diesem Resultate beilegen darf. Die unter gewöhnlichen Verhältnissen gemessenen Funkenpotentiale sind in einem Fall benutzt worden, wo der zur Funkenbildung nöthige Potentialunterschied nur während eines Bruchtheils einer Schwingung, also jedesmal nur während einiger Tausendmilliontel Secunden besteht. Es fragt sich, ob die Funkenbildung unter so verschiedenen Verhältnissen bei demselben Potentialunterschied vor sich geht. Hierauf wäre ein Rückschluss möglich, wenn man nach einer anderen Methode die Dämpfung der secundären Schwingungen gemessen hat.

20. Wie unvollkommen auch hiernach unsere Kenntniss dieser Dämpfung ist, so können wir uns doch ein ganz anschauliches Bild von den Schwingungen im secundären Kreise machen; denn von der grössten Dämpfung, derjenigen im primären Leiter, hängen die Eigenthümlichkeiten hauptsächlich ab.

Die Figuren 10<sub>a</sub> und 10<sub>b</sub> stellen diese Schwingungen graphisch dar, so wie man sie nach den allgemeinen Formeln (2) erhält als Superposition der gezwungenen und der freien Schwingungen, wenn man die logarithmischen Decremente  $\gamma = 0,26$  und  $\delta = 0,002$  einführt. Die erste Curve (a) entspricht der Resonanz. Die Ausschläge steigen so lange, als die primären Schwingungen noch merkbar sind. Nach neunzehn derselben wird das Maximum erreicht, und die Abnahme fängt an, indem die Dämpfung der secundären die Wirkung der noch vorhandenen primären Schwingungen überwiegt.

Die zweite Curve entspricht dem Fall, dass der secundäre Kreis zehn Schwingungen macht, während der andere nur neun. Die Ausschläge betragen im Mittel ungefähr blos ein Drittel desjenigen bei Resonanz. Die primären Schwingungen wirken jetzt abwechselnd additiv und subtractiv; es treten deshalb Schwebungen ein, die indessen mit den primären Schwingungen absterben. Eine eigenthümliche Wir-

kung dieser Schwebungen ist, dass der grösste Ausschlag um so früher eintritt, je mehr man sich von der Resonanz entfernt, in dem vorliegenden Fall z. B. schon bei der fünften Schwingung.

Entfernt man sich noch mehr vom Resonanzpunkte, so hören auch die regelmässigen Schwebungen auf; die Curven erhalten mehr zackige und unregelmässige Wellen von verschiedenen Höhen, aber hier bleiben, wie immer, nach etwa zwanzig Schwingungen nur die regelmässigen und langsam abnehmenden Eigenschwingungen des secundären Kreises zurück.

#### Zusatz.

21. Bei den Untersuchungen über die Abhängigkeit der Dämpfung von der Länge  $l$  des primären Funkens hat sich gezeigt, dass die Electrometerausschläge bei wachsender Funkenstrecke abnehmen. Dies geht aus der Tabelle III nicht hervor, weil dort alle Zahlen so reducirt sind, dass das Maximum die Höhe 1 erhält. Die Mittelwerthe der direct beobachteten maximalen Ausschläge  $E_s$  waren:

$l =$	1	2	3	4	5 mm
$E_s =$	35	32,2	25,0	18,3	10,8

Die Erscheinung hat sich in einer grossen Anzahl Controlbeobachtungen wiederholt. Für  $E_s$  zeigte sich im allgemeinen ein Maximum zwischen 1 und 2 mm Funkenstrecke. Bei dem grossen Inductorium zeigte sich dies Maximum etwas mehr nach aussen verschoben, etwa bei 3 mm Funkenstrecke. Bei einer wie oben stets bei kurzer Beobachtungszeit vorgenommenen Messung der secundären Funken zeigten sich ungefähr dieselben Maxima.

Es liegt nahe, die Ursache davon in der oben erwiesenen steigenden Dämpfung zu suchen. Dies ergibt indessen keine Uebereinstimmung, wenn man anders aus der Funkenlänge auf den Potentialunterschied nach dem gewöhnlichen angenäherten Proportionalgesetz schliessen darf. Nach der Formel (4<sub>3</sub>) ist der maximale Electrometerausschlag  $E_s$  proportional  $\mathcal{A}^2/\alpha^2$ . Hier kann dann  $\mathcal{A}$  durch  $l$ , und, da die Schwingungsdauer constant ist,  $\alpha$  durch  $\gamma$  ersetzt werden. Es soll also  $E_s$  proportional  $l^2/\gamma^2$  sein. Setzt man indessen nach (V) die Werthe von  $l$  und  $\gamma$  ein, so findet man stark



anwachsende Zahlen statt der abnehmenden  $E_0$ . Zu bemerken ist aber, dass das erwähnte Proportionalitätsgesetz in diesem Falle noch nicht durch directe Versuche geprüft ist. Vielleicht steigt wegen der Schnelligkeit der Ladung vermittelt des Inductionstromes der Potentialunterschied bei allen Funkenstrecken um einen gewissen Betrag über den erwarteten Werth hinaus. Ein solches Verhältniss dürfte wieder Uebereinstimmung herstellen.

Es sind jedoch auch andere Erklärungen möglich. Damit Schwingungen zu Stande kommen, ist nicht nur nothwendig, dass der Funke eine genügende Leitungsfähigkeit habe; es ist auch unerlässlich, dass der Zeitverlauf von dem Augenblicke an, wo die erste Spur von Leitungsfähigkeit anfängt, bis zu demjenigen, wo der für Schwingungen nöthige Werth vorliegt, kurz ist in Vergleich mit der Dauer einer Schwingung. In dieser Frist findet ein Abströmen der Electricität ohne Schwingungen statt, und die Annahme, dass diese Zeit mit der Länge des Funkens, wenn auch nur um wenige Tausendmilliontel Secunden wächst, möchte die Erscheinung erklären.

Ist es hiernach im allgemeinen nothwendig, die wechselnde Leitungsfähigkeit des Funkens mit in Betracht zu ziehen, so ist man auch berechtigt daran zu zweifeln, ob die Annahme erlaubt sei, dass die primären Schwingungen nach einem einfachen Exponentialgesetz abnehmen, so wie wir es vom Anfang an vorausgesetzt haben. Indessen verliert das gewonnene Resultat deshalb nicht seine Bedeutung. Fig. 9 stellt unter allen Umständen eine regelmässig gedämpfte Schwingung dar, die in Bezug auf die Resonanzerscheinung mit den wirklichen Schwingungen gleichwerthig ist.

Bonn, 4. Juni 1891.

V. Ueber die Erscheinung der multiplen Resonanz  
electrischer Wellen;  
von V. Bjerknes aus Christiania.

1. Durch Untersuchungen über die in einem Draht erzeugten stehenden electrischen Wellen sind die Herren Sarasin und de la Rive zu dem bemerkenswerthen Resultat gekommen: *Die auf gewöhnliche Weise gemessene Länge solcher Wellen variirt mit den Dimensionen des secundären Leiters, wenn auch der primäre Leiter derselbe bleibt; sie ist constant für einen und denselben secundären Leiter, welches auch der primäre Leiter sei.*<sup>1)</sup> In einer späteren Mittheilung erwähnen sie, dass dasselbe bei Wellen im Luftraume stattfindet, aber doch innerhalb engerer Grenzen.

Die Herren Sarasin und de la Rive haben ihre interessante Entdeckung so gedeutet, dass alle durch die verschiedenen secundären Kreise beobachteten Wellen thatsächlich vorhanden seien; dass also der primäre Leiter, etwa wie die Sonne, Wellen von allen möglichen Längen aus sende. Die Erscheinung haben sie als „multiple Resonanz“ bezeichnet.

2. In der vorbergehenden Arbeit habe ich die Dämpfung der electrischen Schwingungen studirt. Es wurde für den primären Leiter nach den besten Messungen das logarithmische Decrement  $\gamma = 0,26$  gefunden; für den secundären nach einer allerdings unvollkommenen Methode  $\delta = 0,002$ . *Verfolgt man die Consequenzen dieser Zahlen für die Bildung stehender Wellen und für die Beobachtung derselben mit dem secundären Kreis, so kommt man von selber zu dem experimentellen Resultate von Sarasin und de la Rive, ohne dass es nöthig wäre, deren Hypothese zu Hülfe zu nehmen.*

1) Sarasin et de la Rive, Arch. des scienc. phys. et natur. 23. p. 113. Genève Fevrier 1890. Die weitere mir bekannte Literatur über diesen Gegenstand ist: Sarasin et de la Rive, Compt. rend. 110. p. 72. 1890. Cornu, Compt. rend. 110. p. 75. 1890. Sarasin et de la Rive, Arch. de Genève. 23. p. 557. 1890. Waitz, Wied. Ann. 41. p. 433. 1890. Sarasin et de la Rive, Compt. rend. 112. p. 658. 1891. Poincaré, Electricité et optique II. Note V. p. 249. Paris 1891.

Der secundäre Kreis muss in der That zwei Systeme der Maxima und Minima anzeigen, ein schwach und ein stark ausgebildetes, wie man durch folgende Erwägung ersieht. Die primären Schwingungen erzeugen stehende Wellen, die wegen der starken Dämpfung sehr unvollkommen sind. Der secundäre Kreis muss ein entsprechend unvollkommen ausgebildetes System von Maxima und Minima anzeigen, dessen Wellenlänge den thatsächlich vorhandenen Wellen entspricht. Dies erste System wird indessen von einem anderen überdeckt, dessen Zustandekommen sich so erklärt: Jeder einzelne Wellenberg theilt dem secundären Kreise zwei Stösse mit, zuerst vor, dann nach der Reflexion. Der zweite Stoss verstärkt oder vernichtet die Wirkung des ersten, je nachdem der secundäre Kreis in der Zwischenzeit eine gerade oder ungerade Anzahl halber Schwingungen vollführt hat. Der secundäre Kreis wird mehr oder weniger stark erregt, je nachdem sein Abstand vom Spiegel ein gerades oder ungerades Vielfaches von denjenigen Wellenlängen ist, die seinen Eigenschwingungen entsprechen.

Dies letzte System von Maxima und Minima ist bei weitem am stärksten ausgebildet, solange die primären Schwingungen stark und die secundären schwach gedämpft sind. In Bezug auf die Genauigkeit der obigen letzten Zahl  $\delta$  habe ich mich in der vorigen Abhandlung mit Vorbehalt ausgesprochen; aber es ändert sich nichts in der Hauptsache, wenn man diese Zahl auch zehnmal grösser ansetzt, solange sie erheblich kleiner als  $\gamma$  bleibt. Sieht man also von dem ersten undeutlichen System von Maxima und Minima ab, so hat man das Resultat von Sarasin und de la Rive. Es ist also auch eine Erklärung der multiplen Resonanz möglich, wenn man an der Vorstellung festhält, dass im primären Leiter nur eine einzige Schwingung besteht.

Die Rechnungen sind in dem Folgenden für ebene Wellen im Luftraume durchgeführt.

#### I. Stehende electricische Wellen im Luftraume.

3. Es sei die  $yz$ -Ebene die reflectirende Metallwand. Ein mit ihr paralleles System ebener Wellen komme von positiv unendlich  $x$ . Die electricische Kraft, welche in der

Wellenebene liegt, sei parallel der  $y$ -Axe. Die aufeinander folgenden Wellen sollen nach einem Exponentialgesetze abnehmen, aber jede Welle an sich soll sich mit unveränderlicher Höhe fortpflanzen. Zur Zeit  $t = 0$  soll die Bewegung die  $yz$ -Ebene erreichen.

Ein solches Wellensystem wird annähernd erzeugt, wenn an der  $x$ -Axe in grosser Entfernung ein primärer Stromkreis parallel der  $y$ -Axe aufgestellt wäre.

Die electricische Kraft  $Y_1$  des einfallenden Wellenzuges können wir dann schreiben:

$$(1) \quad Y_1 = \mathfrak{A} e^{-at - a_1 x} \sin(at + a_1 x).$$

Die Forderung, dass sich jede Welle mit unveränderter Höhe fortpflanze, ergibt:

$$(1_1) \quad \frac{a}{a_1} = \frac{\alpha}{\alpha_1} = v,$$

wo  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Bis zum Zeitpunkt  $t = 0$  soll die  $yz$ -Ebene sich in Ruhe befinden. Daraus ergibt sich:

$$(1_2) \quad t < -\frac{x}{v}, \quad Y_1 = 0.$$

Wenn  $T$  Schwingungsdauer und  $\lambda$  Wellenlänge bezeichnet, so ist wie gewöhnlich:

$$(1_3) \quad a = \frac{2\pi}{T}, \quad a_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und das logarithmische Decrement der Wellen:

$$(1_4) \quad Y = aT = \alpha_1 \lambda = 2\pi \frac{\alpha}{a} = 2\pi \frac{a_1}{a}.$$

An der Oberfläche des Spiegels ist nach der Maxwell'schen Theorie die electricische Kraft immer gleich 0. Die Gleichung der reflectirten Bewegung wird dann:

$$(2) \quad Y_2 = -\mathfrak{A} e^{-at + a_1 x} \sin(at - a_1 x).$$

wo natürlich die Bedingung (1') fortwährend gilt und wo:

$$(2_1) \quad t < \frac{x}{v}, \quad Y_2 = 0.$$

Die electricische Kraft  $Y$  in einem Punkte  $x$  ist also folgendermaassen bestimmt: bis zum Zeitpunkte  $t = -x/v$  ist  $y = 0$ . Im Zeitraume von  $t = -x/v$  zu  $t = x/v$  ist  $Y = Y_1$ , von diesem Augenblicke an  $Y = Y_1 + Y_2$ , wo:

$$(3_1) \quad \begin{cases} Y_1 + Y_2 = \Re(e^{a_1 x} + e^{-a_1 x}) \sin a_1 x \cdot e^{-at} \cos at \\ \quad - \Re(e^{a_1 x} - e^{-a_1 x}) \cos a_1 x \cdot e^{-at} \sin at. \end{cases}$$

4. Für kleine Werthe von  $a_1 x$  reducirt sich  $e^{a_1 x} + e^{-a_1 x}$  auf 2,  $e^{a_1 x} - e^{-a_1 x}$  auf 0, und die Gleichung (3) vereinfacht sich zu:

$$(3_2) \quad Y_1 + Y_2 = 2\Re \sin a_1 x \cdot e^{-at} \cos at.$$

Dies ist der bekannte Ausdruck einer stehenden Schwingung mit festen Knoten in den Punkten, wo  $\sin a_1 x$  gleich Null ist. Das Wort „stehend“ bezieht sich nur auf die räumliche Vertheilung der Schwingungen; denn mit der Zeit nehmen sie nach dem Exponentialgesetze ab.

Mit wachsendem  $x$  wird der Ausdruck (3<sub>2</sub>) immer ungenauer. Das störende Glied macht sich um so mehr geltend als es sein Maximum in den Knoten hat; bis zu welchem Abstände vom Spiegel man es noch vernachlässigen darf, hängt von dem Werth von  $a_1$  ab. Führen wir als Längen- und Zeiteinheit die Wellenlänge und Schwingungsdauer der Wellenbewegung ein, so wird die Gl. (1) zu schreiben sein:

$$Y_1 = \Re(e^{-\gamma(t+x)}) \sin 2\pi(t+x),$$

wo  $\gamma$  das logarithmische Decrement der Schwingungen ist. In der vorhergehenden Abhandlung haben wir als kleinsten Werth  $\gamma = 0,26$  gefunden. In dem ersten Knoten, das heisst für  $x = 1/2$  wird dann  $e^{0,13} - e^{-0,13} = 0,26$ . Also besteht schon im ersten Knoten eine Bewegung:

$$0,26 \Re e^{-at} \cos at,$$

die mehr als ein Zehntel von der Bewegung im ersten Bauche beträgt. Setzt man die Rechnung fort, so findet man die Bewegung in dem viertem Knoten gleich der Hälfte und im zehnten Knoten gleich neun Zehntel von der Bewegung im benachbarten Bauche. Dieser letzte Knoten liegt also in einem Abstand von fünf Wellenlängen vom Spiegel. Von da an wird der Unterschied zwischen Maxima und Minima sehr schwach, und verschwindet allmählich.

Nur an dem Spiegel selbst ist die Bewegung stets gleich Null; ausser diesem Punkte gibt es keine Knoten im gewöhnlichen strengen Sinne des Wortes. Wenn wir jedoch fernerhin dieses Wort gebrauchen, so verstehen wir darunter Punkte, wo die

Wellenebene liegt, sei parallel der  $y$ -Axe. Die aufeinander folgenden Wellen sollen nach einem Exponentialgesetze abnehmen, aber jede Welle an sich soll sich mit unveränderlicher Höhe fortpflanzen. Zur Zeit  $t = 0$  soll die Bewegung die  $yz$ -Ebene erreichen.

Ein solches Wellensystem wird annähernd erzeugt, wenn an der  $x$ -Axe in grosser Entfernung ein primärer Stromkreis parallel der  $y$ -Axe aufgestellt wäre.

Die electricische Kraft  $Y_1$  des einfallenden Wellenzuges können wir dann schreiben:

$$(1) \quad Y_1 = \Re e^{-\alpha t - \alpha_1 x} \sin(at + \alpha_1 x).$$

Die Forderung, dass sich jede Welle mit unveränderter Höhe fortpflanze, ergibt:

$$(1_1) \quad \frac{a}{\alpha_1} = \frac{a}{\alpha_1} = v,$$

wo  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Bis zum Zeitpunkt  $t = 0$  soll die  $yz$ -Ebene sich in Ruhe befinden. Daraus ergibt sich:

$$(1_2) \quad t < -\frac{x}{v}, \quad Y_1 = 0.$$

Wenn  $T$  Schwingungsdauer und  $\lambda$  Wellenlänge bezeichnet, so ist wie gewöhnlich:

$$(1_3) \quad a = \frac{2\pi}{T}, \quad \alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und das logarithmische Decrement der Wellen:

$$(1_4) \quad Y = \alpha T = \alpha_1 \lambda = 2\pi \frac{\alpha}{a} = 2\pi \frac{\alpha_1}{a}.$$

An der Oberfläche des Spiegels ist nach der Maxwell'schen Theorie die electricische Kraft immer gleich 0. Die Gleichung der reflectirten Bewegung wird dann:

$$(2) \quad Y_2 = -\Re e^{-\alpha t + \alpha_1 x} \sin(at - \alpha_1 x).$$

wo natürlich die Bedingung (1') fortwährend gilt und wo:

$$(2_2) \quad t < \frac{x}{v}, \quad Y_2 = 0.$$

Die electricische Kraft  $Y$  in einem Punkte  $x$  ist also folgendermaassen bestimmt: bis zum Zeitpunkte  $t = -x/v$  ist  $y = 0$ . Im Zeitraume von  $t = -x/v$  zu  $t = x/v$  ist  $Y = Y_1$ , von diesem Augenblicke an  $Y = Y_1 + Y_2$ , wo:

$$(3_1) \quad \begin{cases} Y_1 + Y_2 = \mathfrak{A}(e^{a_1 x} + e^{-a_1 x}) \sin a_1 x \cdot e^{-\sigma t} \cos at \\ \quad - \mathfrak{A}(e^{a_1 x} - e^{-a_1 x}) \cos a_1 x \cdot e^{-\sigma t} \sin at. \end{cases}$$

4. Für kleine Werthe von  $a_1 x$  reducirt sich  $e^{a_1 x} + e^{-a_1 x}$  auf 2,  $e^{a_1 x} - e^{-a_1 x}$  auf 0, und die Gleichung (3) vereinfacht sich zu:

$$(3_2) \quad Y_1 + Y_2 = 2\mathfrak{A} \sin a_1 x \cdot e^{-\sigma t} \cos at.$$

Dies ist der bekannte Ausdruck einer stehenden Schwingung mit festen Knoten in den Punkten, wo  $\sin a_1 x$  gleich Null ist. Das Wort „stehend“ bezieht sich nur auf die räumliche Vertheilung der Schwingungen; denn mit der Zeit nehmen sie nach dem Exponentialgesetze ab.

Mit wachsendem  $x$  wird der Ausdruck (3<sub>2</sub>) immer ungenauer. Das störende Glied macht sich um so mehr geltend als es sein Maximum in den Knoten hat; bis zu welchem Abstände vom Spiegel man es noch vernachlässigen darf, hängt von dem Werth von  $a_1$  ab. Führen wir als Längen- und Zeiteinheit die Wellenlänge und Schwingungsdauer der Wellenbewegung ein, so wird die Gl. (1) zu schreiben sein:

$$Y_1 = \mathfrak{A} e^{-\gamma(t+x)} \sin 2\pi(t+x),$$

wo  $\gamma$  das logarithmische Decrement der Schwingungen ist. In der vorhergehenden Abhandlung haben wir als kleinsten Werth  $\gamma = 0,26$  gefunden. In dem ersten Knoten, das heisst für  $x = 1/2$  wird dann  $e^{0,13} - e^{-0,13} = 0,26$ . Also besteht schon im ersten Knoten eine Bewegung:

$$0,26 \mathfrak{A} e^{-\sigma t} \cos at,$$

die mehr als ein Zehntel von der Bewegung im ersten Bauche beträgt. Setzt man die Rechnung fort, so findet man die Bewegung in dem viertem Knoten gleich der Hälfte und im zehnten Knoten gleich neun Zehntel von der Bewegung im benachbarten Bauche. Dieser letzte Knoten liegt also in einem Abstand von fünf Wellenlängen vom Spiegel. Von da an wird der Unterschied zwischen Maxima und Minima sehr schwach, und verschwindet allmählich.

Nur an dem Spiegel selbst ist die Bewegung stets gleich Null; ausser diesem Punkte gibt es keine Knoten im gewöhnlichen strengen Sinne des Wortes. Wenn wir jedoch fernerhin dieses Wort gebrauchen, so verstehen wir darunter Punkte, wo die



Bewegung ein Minimum ist, ohne nothwendigerweise gleich Null zu sein.

Es enthält so nach dem oben gesagten keinen Widerspruch, wenn der secundäre Kreis, wie die Erscheinung der multiplen Resonanz zeigt, auch in einem Knoten ansprechen kann.

## II. Beobachtung der stehenden Wellen mit secundärem Stromkreis.

5. Die Ebene des secundären Kreises sei parallel der  $yz$ -Ebene; keine magnetischen Kraftlinien durchsetzen dann seine Fläche; die Electricitätsbewegung wird ausschliesslich durch die electricische Kraft  $Y$  erzeugt. Die Aufgabe ist nun, das Gesetz für die Variationen der Schwingungen des secundären Kreises mit dem Abstand  $x$  vom Spiegel zu ermitteln.

Zur Darstellung des Vorganges im secundären Kreise benutze ich dieselbe Differentialgleichung wie in der vorhergehenden Abhandlung, also die Gleichung für das gedämpfte Pendel, das durch eine gedämpfte periodische Kraft in Bewegung gesetzt wird. Der einzige Unterschied liegt in der Voraussetzung, dass die periodische Kraft mit dem Werth 0 anfängt, das heisst, die Wellen pflanzen sich durch einen neutralen Raum fort, so wie es der Fall bei genügendem Abstand vom primären Stromkreise ist.

Wenn der secundäre Kreis sich im Punkte  $x$  befindet, fängt die Kraft der einfallenden Welle im Zeitpunkt  $t = -x/v$  zu wirken an. Die Electricitätsbewegung ist dann gegeben durch Gleichung:

$$(4_1) \quad \frac{d^2 q_1}{dt^2} + 2\beta \frac{dq_1}{dt} + (\beta^2 + \beta^2) q_1 = \mathfrak{A} e^{-\alpha t - \alpha_1 x} \sin(a t + a_1 x)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$t = -\frac{x}{v}, \quad q_1 = 0, \quad q_1' = 0.$$

Diese Gleichung gilt bis zur Zeit  $t = x/v$ . Von da an wirkt die Kraft der einfallenden und die der zurückkehrenden Welle gemeinschaftlich. Man erhält dann eine analoge Gleichung, wo die rechte Seite  $Y_1 + Y_2$  (3<sub>1</sub>) ist, und wo die Ini-

tialbedingung besteht, dass die Lösung eine continuirliche Fortsetzung der Lösung  $\varphi_1$  sei.

Wegen des linearen Charakters der Gleichungen können wir indessen die Aufgabe so fassen: die Gleichung (4<sub>1</sub>) gilt immer von dem Zeitpunkte  $t = -x/v$  an. Zur Zeit  $t = x/v$  fängt die Kraft der reflectirten Welle zu wirken an, und erzeugt einen Potentialunterschied  $\varphi_2$ , unabhängig von der früheren Kraft und der früheren Bewegung:

$$(4_2) \quad \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi_2}{dt} + (b^2 + \beta^2) \varphi_2 = -\mathfrak{A}e^{-at+a_1x} \sin(at - a_1x),$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$t = \frac{x}{v}, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_2' = 0.$$

Von diesem Zeitpunkt an ist der Zustand des secundären Kreises gegeben durch:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

6. Die Lösungen der Aufgaben (4<sub>1</sub>) und (4<sub>2</sub>) haben die Form:

$$(5_1) \quad \varphi_1 = Ae^{-at-a_1x} \sin(at + a' + a_1x) + Be^{-\beta t - \beta_1x} \sin(bt + b' + b_1x).$$

$$(5_2) \quad \varphi_2 = -Ae^{-at+a_1x} \sin(at + a' - a_1x) - Be^{-\beta t + \beta_1x} \sin(bt + b' - b_1x).$$

wo, entsprechend den Relationen (1<sub>1</sub>):

$$(5_3) \quad \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{b}{b_1} = v.$$

Die absoluten Werthe der Constanten  $A, B, a, b$  spielen in der folgenden Discussion keine Rolle; es sind übrigens Ausdrücke ziemlich ähnlich gebaut wie die entsprechenden Formeln (2<sub>1</sub>) und (2<sub>2</sub>) der vorhergehenden Abhandlung. Nur beachten wir folgende einfache Relation, die sich aus den Anfangsbedingungen ergibt:

$$(5_4) \quad B = \frac{a}{b} A,$$

woraus folgt, dass die Amplituden  $A$  und  $B$  bei gleicher Schwingungsdauer gleich sind, und sonst von derselben Grössenordnung bleiben, so lange die Schwingungsdauern es sind.

Von der Zeit  $t = x/v$  an stellt sich die Bewegung im secundären Stromkreis durch die Summe dar:

$$(6_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= A(e^{\beta_1 x} + e^{-\beta_1 x}) \sin a_1 x \cdot e^{-\alpha t} \cos(at + a') \\ &\quad - A(e^{\beta_1 x} - e^{-\beta_1 x}) \cos a_1 x \cdot e^{-\alpha t} \sin(at + a'), \\ &\quad + B(e^{\beta_2 x} + e^{-\beta_2 x}) \sin b_1 x \cdot e^{-\beta t} \cos(bt + b') \\ &\quad - B(e^{\beta_2 x} - e^{-\beta_2 x}) \cos b_1 x \cdot e^{-\beta t} \sin(bt + b'). \end{aligned} \right.$$

In den zwei ersten Zeilen stehen die gezwungenen Schwingungen, die in Schwingungsdauer und Dämpfung dem primären Leiter folgen, in den beiden letzten die freien Schwingungen, deren Schwingungsdauer und Dämpfung Constanten des secundären Kreises sind. Aus der Formel ersieht man dann, dass die Amplituden beider Arten von Schwingungen periodische Functionen des Abstandes vom Spiegel sind, und es kommen zwei Wellenlängen vor: bei den gezwungenen Schwingungen diejenige der thatsächlich vorhandenen Wellen:  $\lambda_a = 2\pi/a_1$ ; bei den freien dagegen diejenigen, die den Eigenschwingungen des secundären Kreises entsprechen:  $\lambda_b = 2\pi/b_1$ .

7. Wir nehmen in der folgenden Discussion an, dass eine Schwingung mit einer weniger als ein Zehntel betragenden Amplitude unmerklich ist neben einer anderen von der Amplitude 1, und ebenso, dass der Unterschied zwischen einem Maximum und einem Minimum bedeutungslos ist, wenn er nur ein Zehntel vom absoluten Werth des Maximums beträgt.

Betrachten wir erst den zeitlichen Ablauf der Bewegung (6<sub>1</sub>) im secundären Kreise. Die gezwungenen Schwingungen mit dem logarithmischen Decremente  $\gamma = 0,26$  sind dann schon nach zehn Schwingungen vom Zeitpunkte  $t = x/v$  an bedeutungslos neben den freien mit dem logarithmischen Decremente  $\delta = 0,002$ , die noch ziemlich ungeschwächt sind.  $\varphi$  reducirt sich also von da an auf:

$$(6_2) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= B(e^{\beta_2 x} + e^{-\beta_2 x}) \sin b_1 x \cdot e^{-\beta t} \cos(bt + b') \\ &\quad - B(e^{\beta_2 x} - e^{-\beta_2 x}) \cos b_1 x \cdot e^{-\beta t} \sin(bt + b'). \end{aligned} \right.$$

Beschränken wir uns auf einen kleinen Abstand vom Spiegel, zum Beispiel auf fünf Wellenlängen  $\lambda_b$ , so reducirt dieser Ausdruck sich ohne merkbaren Fehler auf:

$$(6_3) \quad \varphi = 2B \sin b_1 x \cdot e^{-\beta t} \cos(bt + b').$$

Nach Ablauf der ersten zehn Schwingungen und dazu in genügender Nähe des Spiegels gilt also folgendes Gesetz für die Schwingungen im secundären Kreise: Die Amplitude

$2B \sin b_1 x$  schwankt nach einem Sinusgesetz, und die Wellenlänge  $\lambda_0 = 4\pi/b_1$  entspricht den Eigenschwingungen des secundären Kreises. Dies stimmt, wie man sieht, mit dem Resultat von Sarasin und de la Rive überein.

Die Beschränkung, dass dies erst nach dem Ablauf der zehn ersten Schwingungen gilt, ist nicht immer nothwendig, wie es der vollständige Ausdruck (6<sub>1</sub>) zeigt. Der Ausdruck der gezwungenen Schwingungen in (6<sub>1</sub>), als Function von  $x$  betrachtet, unterscheidet sich nicht von dem oben discutirten Ausdruck (3<sub>1</sub>) der stehenden Schwingungen. In fünf Wellenlängen Abstand vom Spiegel ist der Unterschied zwischen Maxima und Minima bedeutungslos. Die freien Schwingungen dagegen haben noch schön ausgebildete Maxima und Minima bis zu dem bedeutenden Abstand, wo das letzte Glied in (6<sub>2</sub>) dem ersten an Grösse nahe kommt. Für dieses Gebiet gilt also schon vom Zeitpunkt  $t = x/v$  an, dass die Amplitude der Schwingungen Maxima und Minima hat mit der Wellenlänge des secundären Kreises.

9. Sarasin und de la Rive haben ihre Entdeckung durch Beobachtung des secundären Funkens gemacht. Wahrscheinlich hängt die Länge desselben von dem grössten Ausschlag der secundären Schwingungen ab. Dieser hat, je nach den Umständen verschiedene Höhen und tritt zu verschiedenen Zeiten ein. Die Figuren 10<sub>a</sub> und 10<sub>b</sub> der vorigen Abhandlung veranschaulichen dies für den Fall, dass nur ein Wellenzug vorübergeht. Noch complicirter fallen diese Curven aus in dem vorliegenden Falle. Eine eingehende Discussion würde deshalb sehr weit führen. Es sei nur bemerkt, dass der grösste Ausschlag immer relativ früh eintritt. Wenn der Unterschied in der Schwingungsdauer beträchtlich wird, tritt er immer vor der zehnten Schwingung ein. Die gezwungenen Schwingungen haben dann zur Zeit der Funkenbildung ihre Bedeutung noch nicht vollständig verloren, und es dürfte deshalb nicht unmöglich sein, die entsprechenden Maxima und Minima nachzuweisen, besonders in der Nähe vom Spiegel, wo sie am stärksten auftreten.

10. Ueber die Erscheinungen in Drähten. — In Drähten reflectiren sich zwischen den Enden die erzeugten Wellen ins unendliche. Die Aufgabe führt dann zur Behandlung

einer unendlichen Reihenfolge von Gleichungen der Form (4). Die Rechnungen sind durchaus durchführbar, und man findet, dass die Amplituden der secundären Schwingungen mit den Abständen von den Drahtenden periodisch ab- und zunehmen. Hierbei kommen zwei Systeme von Maxima und Minima vor, und das den secundären Schwingungen entsprechende macht sich vor dem anderen in demselben Maasse wie früher geltend. Für die an dem Ende eines sehr langen Drahtes eintretenden Erscheinungen kann man unmittelbar die oben entwickelten Formeln verwenden, indem wie im Luftraume nur eine einzige Reflexion berücksichtigt zu werden braucht.

Sarasin und de la Rive finden, dass die Erscheinung der multiplen Resonanz deutlicher in Drähten hervortritt als im Luftraume. Ein Grund hierfür ist darin zu sehen, dass die primären Schwingungen wegen der Energieabfuhr durch den Draht noch stärker gedämpft sind. Ich habe dies mit Benutzung der in voriger Abhandlung angegebenen Methode nachgewiesen und ein eventuelles Anwachsen des logarithmischen Decrementes von 0,26 bis mehr als dem doppelten Werthe constatirt.

11. Die obige Untersuchung schliesst sich möglichst enge an die in der vorigen Abhandlung gefundenen logarithmischen Decremente an. Zu bemerken ist, dass letztere allerdings keine physikalischen Constanten sind; für das Decrement der primären Schwingungen wurden schon mit Sicherheit bei Verschiedenheit der Anordnung verschiedene Werthe constatirt. Von diesen habe ich immer den kleinsten Werth, also den für das Zustandekommen der multiplen Resonanz ungünstigsten benutzt. Die Richtigkeit des gefundenen logarithmischen Decrementes der secundären Schwingungen spielt eine viel geringere Rolle, solange wir annehmen dürfen, dass dieses im Vergleich zu demjenigen der primären Schwingungen erheblich kleiner ist.

Im allgemeinen gilt, dass die Erscheinung der multiplen Resonanz um so stärker hervortreten muss, je mehr die primären und je weniger die secundären Schwingungen gedämpft sind. Bei gleicher Dämpfung beider Schwingungen würden die den primären Schwingungen entsprechenden Maxima und Minima ebenso deutlich hervortreten als die den secundären

entsprechenden. Sehr einfache und reine Erscheinungen erhält man nur dann, wenn beide Systeme von Maxima und Minima zusammenfallen, wenn also der primäre und secundäre Kreis auf Resonanz abgestimmt sind, und in Drähten, wenn die Drahtlänge zugleich ein vielfaches der Wellenlänge ist.

Man kann über die Zulässigkeit obiger Erklärungen verschiedener Meinung sein; gibt man dieselben als richtig zu, so lassen die Hauptergebnisse der Untersuchung sich so zusammenfassen.

*Fasst man den Begriff stehender Wellen sehr eng, so kann man mit Recht leugnen, dass solche überhaupt vorhanden seien, wir haben alsdann nur einen ankommenden und einen reflectirten Wellenzug, beide von starker Dämpfung.*

*Fasst man den Begriff stehender Wellen hinreichend weit, um hier überhaupt von solchen reden zu können, so sind objectiv stehende Wellen vorhanden, die dem primären Leiter entsprechen; es liegt aber kein bindender Grund vor zu der Annahme stehender Wellen, welche den Schwingungen des secundären Kreises entsprechen.*

Bonn, 4. Juni 1891.

[Anmerkung bei der Correctur. — Während des Druckes dieser Arbeit ist eine Abhandlung von Hrn. Poincaré, Arch. des scienc. phys. et nat. 25. p. 609, Gênevè 15 Juin 1891, erschienen, in der ganz ähnliche Gedanken verfolgt sind. Hr. Poincaré schätzt nach theoretischen Betrachtungen über die Ausstrahlung die Werthe der Dämpfung in beiden Stromkreisen, und mit Hülfe dieser Werthe leitet er die Versuchsergebnisse von Sarasin und de la Rive wesentlich in derselben Weise wie in der vorliegenden Abhandlung her.]

---

VI. *Ein Apparat zur Beobachtung langsamer  
electrischer Schwingungen;  
von R. Colley.<sup>1)</sup>*

(Hierzu Taf. II Fig. 1–3.)

In einer früheren Abhandlung<sup>2)</sup> habe ich einen Apparat zur Beobachtung electrischer Schwingungen und Messung der Periode derselben beschrieben, den ich Oscillometer nannte und der, obgleich seine einzelnen Bestandtheile anderen Apparaten entnommen und nur provisorisch zusammengestellt waren, sich gut bewährte, sodass es mit seiner Hülfe möglich war, die Grösse  $v$ , das Verhältniss der Einheiten der Electricitätsmengen im electrostatischen und electromagnetischen Maasssystem zu bestimmen.

Nunmehr ist es mir gelungen, nach demselben Princip einen vervollkommenen und bequemer zu handhabenden Apparat zu construiren, dessen Beschreibung im Folgenden gegeben werden soll; derselbe ist von Hrn. M. Th. Edelmann in München angefertigt worden.

Der Apparat dient ausschliesslich zur Messung langsamer Schwingungen — von der Ordnung der akustischen (einige hundert in der Secunde); anzuwenden ist er in Folge dessen in einem Stromkreise mit grosser Selbstinduction, dessen Enden mit den Belegen eines Condensators von grosser Capacität verbunden sind.

Man kann auf verschiedene Weise die Schwingungen in einem solchen Stromkreise hervorrufen. Man kann den letzteren als secundären Stromkreis benutzen, indem man den primären Strom unterbricht. Will man aber die Nachbarschaft eines zweiten Stromkreises vermeiden, bei welchem der Moment der Stromunterbrechung nicht mit Bestimmtheit anzugeben ist, so kann man folgende Methode anwenden,

---

1) Aus dem Journ. d. russ. phys. chem. Ges. 23. p. 1. 1891. Auszug des Verfassers.

2) Colley, Wied. Ann. 26. p. 432. 1885; 28. p. 1. 1886.



die ich auch bei meinen oben erwähnten Untersuchungen gebraucht habe. Der Strom einer Batterie geht durch eine Reihe von Drahtrollen aus dickem Draht von kleinem Widerstande. Die Enden dieses Systems von Rollen sind mit den Belegen eines grossen Condensators verbunden. In einen der Leitungsdrähte, die zum Condensator führen, ist das Oscillometer eingeschaltet. Unterbricht man den Strom der Batterie, so fliesst der Extrastrom der Rolle durch das Oscillometer zum Condensator, ladet dessen Belege bis zu einem verhältnissmässig hohen Potential und veranlasst electriche Schwingungen. Die Anordnung des Versuches bietet Analogien mit dem bekannten hydraulischen Widder, wo die Wassermassen, im Fliessen aufgehalten, sich theilweise bis zu einem hohen Niveau anstauen. Bei den electriche Erscheinungen entspricht die Selbstinduction der Trägheit des Wassers.

Das Princip des neuen Oscillometers besteht in der Combination der schwingenden Bewegung eines sehr leichten magnetischen Spiegels und der geradlinigen eines Lichtpunktes, dessen Bild im Spiegel beobachtet wird. Der Spiegel befindet sich innerhalb einer Drahtrolle, durch welche die electriche Schwingungen gehen, und wird durch letztere in Bewegung gesetzt. Als Abbild der resultirenden Bewegung ergibt sich eine Wellenlinie.

Der Apparat Fig. 1 besteht aus zwei Haupttheilen auf besonderen Stativen. Links (in der Zeichnung) befindet sich die Drahtrolle *B* mit dem Spiegel und dem Mikroskop *M*, rechts die rotirende Scheibe *D* mit einer Oeffnung *O* am Rande und (unten) der Stromunterbrecher. Gebraucht man zur Erzeugung der Schwingungen die Methode mit nur einem Stromkreis, so wird die Drahtrolle in den Stromzweig, der zu einem der Belege des Condensators führt, eingeschaltet, der Stromunterbrecher in den Batteriezweig.<sup>1)</sup> Die Fig. 2, und 3 stellen in etwas vergrössertem Maassstab die Drahtrolle dar, die erstere in seitlicher, die zweite in Vorderansicht.

1) Bei Gebrauch zweier Stromkreise muss die Rolle in den secundären, der Unterbrecher selbstverständlich in den primären Batteriezweig eingeschaltet werden.

Die Drahtrolle hat in ihrem vorderen Theil längs der Axe eine conische, nach aussen sich erweiternde Oeffnung, durch die man den Spiegel im Centrum der Rolle beobachten kann; der hintere Theil derselben ist massiv. Von oben nach unten führt durch die Mitte der Rolle eine cylindrische Bohrung, in welche der in Fig. 2<sub>b</sub> besonders dargestellte Theil zu stehen kommt. Es ist dies ein Ebonitcylinder, dessen mittlerer Theil mehr als zur Hälfte entfernt ist, und wo mit Hülfe eines durch eine Spiralfeder gespannten Coconfadens, wie aus der Figur ersichtlich, ein sehr leichter Spiegel aufgehängt ist, auf dessen Rückseite magnetisirte Stahlstreifen (wie in dem bekannten Galvanometer von Thomson) ange kittet sind. Dieser den Spiegel enthaltende Theil des Apparates muss leicht zugänglich sein, weil die Magnete durch die Wirkung der Ströme leicht entmagnetisirt werden können; es geschieht dieses unbedingt jedesmal, sobald die electricischen Schwingungen den Spiegel in einer Lage treffen, die bedeutend von einer der Windungsebene der Drahtrollen parallelen abweicht. Dann bringt man den Spiegel, um ihn zu magnetisiren, einige Secunden in ein starkes magnetisches Feld, wie z. B. zwischen die Pole eines grossen Faraday'schen Electromagnets.

Damit die Drahtrolle bei kleinem Widerstande und nicht zu grossem Selbstinductionscoëfficienten möglichst stark auf den Magnetspiegel wirke, sind die dem Spiegel nächsten Windungen aus verhältnissmässig dünnem Draht gewickelt; in den folgenden Schichten vergrössert sich der Durchmesser desselben allmählich. *K* sind Klemmschrauben, in denen die Drähte auf beiden Seiten der Rolle enden. Der Gesamtwiderstand der Rolle betrug etwa 3 Ohm.

Vor der Rolle, parallel der Windungsebene derselben befindet sich die massive eisenfreie Messingscheibe *D*, welche mittelst eines Schnurlaufes von einem Uhrwerk in sehr regelmässige Drehung versetzt werden kann; der Rand der Scheibe bedeckt angenähert zur Hälfte die conische Oeffnung des vorderen Theiles der Drahtrolle. Nahe am Rande hat die Scheibe *D* ein Loch von ca. 2 mm Durchmesser, das von einer sehr dünnen, mit einem feinen Nadelloch *O* versehenen Metallplatte bedeckt wird. Lichtstrahlen vom Fenster oder

irgend einer künstlichen Lichtquelle dringen durch diese Oeffnung und fallen bei einer bestimmten Lage der Scheibe auf den Spiegel, von dem sie reflectirt werden.

Der vom Spiegel reflectirte helle Punkt wird durch das horizontale Mikroskop  $M$  beobachtet, in dessen Focalebene sich ein Mikrometer — eine mit sehr feiner Theilung versehene Glasplatte — befindet. Berücksichtigt man das geringe Gesichtsfeld des Mikroskopes, so kann man die Bewegung des leuchtenden Punktes innerhalb desselben als geradlinig, vertical und gleichförmig betrachten. Combinirt sich nun diese Bewegung mit der schwingenden, die dem Spiegel durch die electriche Oscillationen ertheilt wird, so ergibt sich eine wellenförmige Curve, eine Sinuslinie mit allmählich abnehmender Amplitude, die sich auf die Mikrometerscala projectirt.

Damit die electriche Schwingungen immer zu einem fest bestimmten Moment beginnen und das erste Maximum der Curve mit einem bestimmten Theilstrich der Mikrometerscala zusammenfalle, ist der Apparat mit einer Vorrichtung versehen, mit deren Hülfe der Strom der Batterie automatisch durch den Apparat selbst unterbrochen wird. Zu diesem Zweck ist die Scheibe  $D$  mit einem Zahn  $z$  versehen, der bei jeder Umdrehung der Scheibe den kurzen Arm  $h$  eines rechtwinklig gebrochenen Hebels fasst, und so auf einige Augenblicke den langen Arm  $l$  desselben hebt. An den langen Arm ist ein Platinstift befestigt, der im Zustande der Ruhe mittelst der Feder  $f$  an die Platinscheibe  $p$  im Gefäß  $g$  gedrückt wird. Der Strom der Batterie durchläuft mittelst der Klemmschrauben  $kk$  den Hebel und das Gefäß, in welch' letzteres man etwas Alkohol gegossen hat. Auf solche Weise erreicht man eine fast momentane Unterbrechung des Stromes, bei fast völliger Abwesenheit von Funken. Die Regulirung des Apparates in Bezug auf den Moment der Stromunterbrechung erreicht man durch Verstellen des Zahnes  $z$  auf verschiedene Stellen der Scheibe  $D$ ; die feinere Einstellung kann man durch Heben oder Senken des Gefäßes  $g$  mittelst Schrauben bewerkstelligen, wie aus der Figur ohne weiteres ersichtlich ist. Die Vorrichtung  $H$ , die das Mikroskop ein wenig zu neigen und zu heben gestattet, dient

ebenfalls zur Einstellung des ersten Maximums der Curve auf einen bestimmten Theilstrich des Mikrometers.

Zum Apparat gehört ausserdem noch ein kleiner, in der Figur nicht abgebildeter Magnet. Er ist auf einem besonderen Stativ in derselben Höhe wie das Centrum der Rolle *B* aufgestellt; man kann mit seiner Hülfe den Spiegel parallel der Windungsebene der Drahtrolle stellen. Alle Theile des Apparates sind, wie aus der Figur ersichtlich, bequem zu handhaben und können leicht in der richtigen gegenseitigen Lage fixirt werden.

In meiner oben erwähnten Abhandlung habe ich die Theorie der Bewegung des Spiegels im Oscillometer unter Einfluss der electrischen Schwingungen entwickelt. Wir haben hier den Fall sogenannter erzwungener Schwingungen eines materiellen Systems. Infolge der schnellen Bewegungen, sowie der geringen Abweichungen von der Gleichgewichtslage kommen als die der richtenden Wirkung der alternirenden Ströme entgegenwirkenden Kräfte nur die Trägheit und die Reibung (richtiger der Widerstand der Luft) in Betracht. Die Kraft, die den Magnet in die Gleichgewichtslage zu bringen bestrebt ist, kann in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt werden, da sie bei weitem geringer ist, als die beiden vorhergenannten. Die Rechnung ergibt, dass die auf die Scala des Mikroskopes projecirte Curve im wesentlichen als graphische Darstellung der Variation sowohl der Potentialdifferenz auf den Belegen des Condensators, als auch der Stromstärke betrachtet werden kann. Misst man nun mit Hülfe des Mikrometers den Abstand zweier benachbarter Maxima der Curve und bestimmt die Umdrehungszeit der Scheibe, sowie den Winkel, um den sie sich drehen muss, damit der Lichtpunkt im Gesichtsfeld durch eine bestimmte Anzahl Scalentheile des Micrometers hindurchgeht<sup>1)</sup>, so kann man die Schwingungsperiode in Bruchtheilen einer Secunde berechnen.

Die ausserordentliche Beweglichkeit des Spiegels bedingt

---

1) Man misst diesen Winkel sehr genau mit Hülfe eines kleinen an die Axe der Scheibe angekitteten Spiegels und eines Fernrohrs mit verticaler Scala, das in einer gemessenen Entfernung aufgestellt ist.

besondere Vorsichtsmaassregeln, um unregelmässige Bewegungen desselben, die von fremden, nicht von den electrischen Oscillationen herrührenden Einwirkungen hervorgerufen werden, womöglich zu vermeiden. Dieses Ziel wird zum Theil schon dadurch erreicht, dass der Strom, sehr bald nach der Unterbrechung, sobald die electrischen Schwingungen abgelaufen sind, durch den Apparat selbst wieder geschlossen wird. Aus dem Schema für die Anordnung des Versuches erhellt nämlich, dass die algebraische Summe aller Electricitätsmengen, die durch das Oscillometer vom Beginn einer Stromunterbrechung bis nach Schluss derselben hindurchgegangen sind, gleich Null ist. Während des Stromschlusses bleibt aber der Condensator, wie leicht ersichtlich, bis zu einer gewissen Potentialdifferenz geladen; bei der Stromunterbrechung entladet er sich durch das Oscillometer und ruft eine einseitige Ablenkung des Spiegels hervor, die sich mit der durch die electrischen Schwingungen bewirkten combinirt. Durch den Stromschluss erhält zwar der Spiegel einen gleichen aber entgegengesetzten Impuls, jedoch nur nach Ablauf der electrischen Schwingungen. Diese Impulse und die ihnen entsprechenden Electricitätsmengen sind übrigens nur gering, denn die Potentialdifferenz bis zu welcher der Condensator ursprünglich geladen wird, ist einige zehn bis hundert Mal geringer als die, bis zu welcher ihn die Wirkung der electrischen Schwingungen nach Art des hydraulischen Widders ladet. Man vermindert den störenden Einfluss des ersten dieser Impulse, indem man einen Condensator von nicht zu grosser Capacität, etwa von  $1\frac{1}{2}$  — 2 Mikrofarad nimmt und eine Batterie von 4—6 Bunsen, um die anfängliche Ladung zu verringern. Die Verlangsamung der electrischen Schwingungen bis zu dem gewünschten Grade, sowie die Vergrösserung der anfänglichen Menge electromagnetischer Energie, die sich dann auf die Schwingungen vertheilen könnte, erreicht man am besten durch Vergrösserung der Selbstinduction der Drahtrolle. Ich füge noch hinzu, dass durch Annäherung oder Entfernung des oben erwähnten zur Einstellung des Spiegels dienenden Magnetes die Schwingungsdauer des Spiegels verändert wird; auf diese Art können störende Beziehungen zwischen der Schwingungsdauer des Spiegels einer-

seits und der Periode der electriche Schwingungen sowie der Stromunterbrechungen andererseits vermieden werden, da sonst bei jeder Unterbrechung die Wirkung kleiner Impulse allmählich angehäuft werden könnte.

Der oben erwähnte Missstand, die vorläufige Ladung des Condensators, fällt weg, wenn man einen primären und secundären Stromkreis anwendet und die Schwingungen im letzten beobachtet. Es ist jedoch schon früher darauf hingewiesen, dass die Nachbarschaft eines zweiten Stromkreises, in dem man eine momentane Stromunterbrechung nicht erreichen kann, noch grössere und unliebsamere Complicationen birgt.

Bei sorgfältiger Beobachtung aller erwähnten Vorsichtsmaassregeln functionirt der Apparat auch bei einem Schliessungskreise regelmässig und gibt im Gesichtsfeld eine sehr schöne Curve. Die Amplitude derselben wird um so grösser, je langsamer bei sonst gleichen Bedingungen die Schwingungen sind.

Zum Schluss bemerke ich noch, dass wenn man in die Drahtrollen Bündel von Eisendrähten oder gar massive eiserne Cylinder oder andere Metallmassen bringt, die Schwingungen verschiedene Modificationen erleiden, welche unter Umständen die ganze Erscheinung bis zur Unkenntlichkeit entstellen können.

## VII. Zur Theorie des Ruhmkorff'schen Apparates; von R. Colley.<sup>1)</sup>

(Hierzu Taf. II Fig. 4–11.)

### I. Theoretischer Theil.

§ 1. Bei der vielfachen Anwendung des Ruhmkorff'schen Apparates ist er begreiflich bald zum Gegenstande vieler Untersuchungen geworden.<sup>2)</sup> Dieselben erstrecken sich jedoch vorzugsweise auf die Lichterscheinungen bei der Entladung, und nur in wenigen finden wir den Versuch, das Wesen der electricischen Vorgänge im Apparat aufzuklären. Eine einigermaassen vollständige Theorie, so wünschenswerth sie auch aus leicht ersichtlichen Gründen wäre, haben wir zur Zeit noch nicht.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, die electricischen Vorgänge in dem Inductionsapparat nach der Unterbrechung des Hauptstroms auf theoretischem Wege zu ermitteln und das Resultat durch den Versuch zu prüfen. Im vorliegenden Falle wie überhaupt bei jedem ersten Ansatz eines Problems (der übrigens auch allein beabsichtigt war), kam es darauf an, gewisse Nebenumstände, wie sie in der Wirklichkeit vorkommen und das Problem compliciren, zunächst ausser acht zu lassen und die Aufgabe angenähert zu lösen. Uebrigens bietet für den Fall eines geschlossenen secundären Stromkreises die Theorie keine besonders zweifelhaften Punkte dar. In betreff des offenen Stromkreises stelle ich mich auf den Standpunkt meiner Vorgänger, H. von Helmholtz, Schiller und anderer, die den Inductionsstrom in allen Theilen des Stromkreises als gleich und nur die Enden des letzteren gleichsam mit den Belegen eines Condensators als verbunden annehmen; sie führen auf solche Weise den Begriff der sogenannten electrostatischen Capacität der Induc-

1) Aus dem Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 23. p. 7. 1891. Auszug des Verfassers.

2) Ich unterlasse sie einzeln zu citiren, da die Literatur ausführlich in Wiedemann's „Electricität“ aufgeführt ist.



tionsrolle ein und setzen dieselbe als constant voraus. In Wirklichkeit haben aber nicht bloß die Enden eine Capacität, sondern die ganze Rolle infolge der verschiedenen Potentiale zwischen den Windungen und hauptsächlich zwischen den einzelnen Windungsschichten, wodurch das Innere der Rolle electrostatisch geladen wird. Aus diesem Grunde haben wir thatsächlich kein Recht, den Strom in allen Theilen des Schliessungskreises als gleich anzunehmen; wir sollten eigentlich die das Problem formulirenden Differentialgleichungen, in denen der Strom nur als Function der Zeit betrachtet wird, durch partielle ersetzen, um die Abhängigkeit des Stromes nicht bloß von der Zeit, sondern auch vom Orte, wo wir ihn betrachten, auszudrücken. Eine solche Aufgabe würde selbst für einen einzelnen Stromkreis höchst verwickelt werden; es wäre dieses etwa derart, wie das Problem von der Bewegung der Electricität in den unterseeischen Kabeln, wozu indess noch die Selbstinduction hinzukäme. Besteht also der secundäre Stromkreis nur aus der Inductionsrolle mit freien Enden, so gelten die Sätze, die in der Voraussetzung, dass der Strom nur eine Function der Zeit sei, gefolgert sind, auch nur, insofern diese Voraussetzung wirklich zulässig ist, d. h. dem Sachverhalt angenähert entspricht.

Damit die theoretischen Vorstellungen sich nach Möglichkeit mit der Wirklichkeit decken, wandte ich folgendes allgemeine Verfahren an. Der Versuch wurde anfangs den Anforderungen der Theorie möglichst entsprechend angeordnet, selbstverständlich auf Kosten praktisch erfolgreicher Wirkung des Apparates. Zu diesem Zwecke musste der Einfluss einiger Factoren absichtlich vergrößert werden, damit gewisse Nebenwirkungen in Vergleich zu denselben verschwinden. Nachdem so die Vorgänge in ihrer möglichsten theoretischen Einfachheit untersucht waren, konnte man nach und nach die Wirkung der genannten Factoren beseitigen und die dadurch bewirkten allmählichen Veränderungen beobachten. Bei einer solchen Untersuchungsmethode konnte man niemals, wenigstens nicht in betreff der wesentlichsten Punkte, bezüglich der wahren Bedeutung der beobachteten Erscheinungen im Zweifel sein.

So wurde z. B. der Einfluss der „electrostatischen Capacität“ der secundären Rolle, von deren zweifelhaftem Sinne soeben die Rede war, dadurch beseitigt, dass man die Enden der Rolle mit einem System Leydener Flaschen verband, deren Capacität jedenfalls grösser als die der Rolle war. In den primären Stromkreis wurden aus Gründen, welche unten erörtert werden sollen, grosse Ergänzungsrollen mit kleinem Widerstande, aber grossem Selbstinductionscoëfficienten eingeschaltet (übrigens ohne Eisendrahtbündel, um neue Complicationen zu vermeiden). Schliesslich war der Condensator im primären Stromkreise nicht der, welcher sich beim Apparat befindet, sondern ein besonderer, dessen Gesammtcapacität bis 5,3 Microfarad betrug, und der aus sechs einzelnen, angenähert gleichen Theilen bestand, die verschieden combinirt werden konnten.

§ 2. Die Wirkung des Ruhmkorff'schen Apparates kann man sich in allgemeinen Zügen folgendermaassen vorstellen. Nach der Unterbrechung des Batteriestromes in der primären Rolle, deren Enden mit den Belegen des Condensators verbunden sind, bewirkt der sogenannte Extrastrom, d. h. der durch die Selbstinduction entstandene, eine Ladung der Belege des Condensators. Gleich darauf beginnt die rückgängige Bewegung der Electricität. Der geringe Widerstand und der bedeutende Selbstinductionscoëfficient des Schliessungskreises auch ohne Einschaltung der Ergänzungsrollen haben zur Folge, dass das Eintreten des electricischen Gleichgewichtes erst nach einigen Hin- und Herbewegungen der Electricität zu Stande kommt; mit anderen Worten, im primären Schliessungskreise können entstehen und entstehen auch wirklich electricische Schwingungen. Die Veränderungen der Stärke des primären Stromes rufen in dem secundären Kreise entsprechende Inductionsströme hervor.

Wir gehen nun daran, für die Electricität in zwei solchen aufeinander wirkenden Stromkreisen die Differentialgleichungen der Bewegung aufzustellen. Den secundären Stromkreis nehmen wir anfangs als offen an, wobei nur seine Enden, wie oben erwähnt, eine gewisse Capacität haben sollen. Für beide Stromkreise gelten folgende Beziehungen: es ist erstens die in jedem Zeitelement  $dt$  durch den Quer-

schnitt des Leitungsdrahtes fließende Electricität gleich dem negativen<sup>1)</sup> Zuwachs der Ladung an seinem Ende und zweitens das Product der Stromstärke in den Widerstand gleich der Summe der electromotorischen Kräfte. Wir erhalten das folgende System simultaner Differentialgleichungen:

$$(1) \quad i = -c \frac{dv}{dt}, \quad (2) \quad ri = v - l \frac{di}{dt} - M \frac{dJ}{dt},$$

$$(3) \quad J = -C \frac{dV}{dt}, \quad (4) \quad KJ = V - L \frac{dJ}{dt} - M \frac{di}{dt}.$$

Es bezeichnet hier für den primären Stromkreis  $i$  die Stromstärke,  $r$  den Widerstand,  $v$  das Potential auf dem freien (nicht mit der Erde verbundenen) Ende des Stromkreises,  $l$  den Selbstinductionscoefficienten,  $c$  die Capacität des Condensators. Die grossen Buchstaben haben die entsprechende Bedeutung für den secundären Stromkreis;  $M$  bezeichnet den Coefficienten ihrer gegenseitigen Induction. Im zweiten Theile der Gl. (2) und (4) stellen die zweiten Glieder die von der Selbstinduction herrührenden, die dritten Glieder die durch gegenseitige Induction entstehenden electromotorischen Kräfte dar.

Ist der Apparat mit einem Drahtbündel versehen, so muss man die Grössen  $l$ ,  $L$  und  $M$  als Coefficienten der mit einem solchen Drahtbündel versehenen Rollen auffassen. Sie werden constant sein, wenn man das magnetische Moment des Bündels dem magnetisirenden Strom proportional setzt. Wir gestatten uns diese Annahme, obgleich sie bekanntlich nur angenähert richtig ist.<sup>2)</sup>

1) Um in den Bezeichnungen den Zusammenhang mit meinen früheren Arbeiten über electrische Schwingungen zu wahren, will ich auch hier als positiv den Strom bezeichnen, der einen positiv geladenen Leiter oder Condensator entladet; die zweite Belegung des letzteren ist immer als mit der Erde verbunden gedacht (beim Potential = 0).

2) Nach dem Grundgesetze über Induction ist die electromotorische Kraft des Inductionsstromes der Differentialquotient nach der Zeit von dem „magnetischen Durchfluss“ durch den Schliessungsbogen (vgl. z. B. Mascart et Joubert, *Electricité* 1. p. 567). Für den secundären Stromkreis müsste man in der Gl. (4) an Stelle der letzten zwei Glieder schreiben:

$$- \frac{d}{dt} (L'J + M'i + N\Phi)$$

In unseren Gleichungen setzen wir voraus, dass die Veränderungen in der Bewegung der Electricität nicht so schnell vor sich gehen, dass man die ungleichmässige Vertheilung des Stromes im Leiter berücksichtigen müsste;  $r$  und  $R$  stellen somit die thatsächlichen Widerstände dar. Ebenso nehmen wir an, dass ausser zur Erwärmung der Leiter gemäss dem Joule'schen Gesetz weiter keine Energie verbraucht werde.

Für den geschlossenen Stromkreis haben wir  $V = 0$  bei  $C = \infty$ ; die Gl. (3) fällt weg und (4) formt sich um zu:

$$(5) \quad KJ = -L \frac{dJ}{dt} - M \frac{di}{dt}.$$

Die Integration der Gl. 1—4 für den offenen und der Gl. (1), (2) und (5) für den geschlossenen secundären Stromkreis bietet principiell keine Schwierigkeiten dar. Der erste Fall führt uns zu einer Differentialgleichung vierter, der zweite zu einer solchen dritter Ordnung. Die complicirte Form der Lösungen erschwert aber ganz ausserordentlich die Auffassung ihrer physikalischen Bedeutung. Um das Resultat durch Entwicklung in Reihen zu vereinfachen, muss man vorher festsetzen, welche Grössen in Vergleich mit anderen als klein anzunehmen sind u. s. w.

Man vereinfacht jedoch die Aufgabe sehr wesentlich, wenn man eine solche Annahme, welche vollständig berechtigt erscheint, schon in den Differentialgleichungen selbst macht, indem man nämlich die Einwirkung des secundären Stromkreises auf den primären vernachlässigt. Man überzeugt sich

wo  $L'$  und  $M'$  Inductioncoefficienten ohne Drahtbündel sind, und das dritte Glied eben die Induction des letzteren ausdrückt;  $\Phi$  ist eine dem magnetischen Moment proportionale Grösse,  $N$  entspricht dem Coefficienten der gegenseitigen Induction. Der im Drahtbündel erzeugte Magnetismus ist das Resultat der Ströme in beiden Rollen, und wir können unter der Voraussetzung, dass die Wirkung beider sich addire, ansetzen:

$$\Phi = af(i) + Af(J),$$

wo die Coefficienten  $a$  und  $A$  von der Zahl und Vertheilung der Windungen der Rolle, von der Form des Drahtbündels und der Beschaffenheit des Eisens abhängig sind. Wenn man  $f(i) = Ki$  annimmt, so kann man die Grössen  $NKa$  und  $NKA$  entsprechend mit  $M'$  und  $L'$  vereinigen:  $NKa + M' = M$  und  $NKA + L' = L$ . Streng genommen sind somit  $M$ ,  $L$  und auch  $l$  Functionen der entsprechenden Stromstärken.

leicht, dass die Grösse  $-M.dJ/dt$ , die diese Wirkung ausdrückt, im allgemeinen infolge der geringen Grösse des Differentialquotienten  $dJ/dt$  klein ist. Die ungeheure Selbstinduction der secundären Rolle mit ihren zahlreichen Windungen verhindert rasche Aenderungen des Stromes  $J$ , wie auch seine absolute Grösse sein möge; sie macht den Strom so zu sagen träge. Ausserdem ist zu beachten, dass der Strom selbst, als solcher (wir sprechen nicht von seiner electromotorischen Kraft) überhaupt nicht gross ist, selbst im geschlossenen Stromkreise nicht; im offenen Stromkreise erreicht er nur einen verschwindenden Werth, denn er theilt nur den Enden des Stromkreises geringe statische Ladungen mit. Oben war erwähnt, dass bei den meisten Versuchen in den primären Stromkreis eine oder mehrere Ergänzungsrollen aus dickem Draht eingeschaltet wurden. Unter diesen Bedingungen wirkt der secundäre Stromkreis nur auf einen Theil des primären, nämlich nur allein auf die inducirende Rolle des Apparates, und die soeben gemachte Voraussetzung erscheint um so mehr berechtigt. Setzen wir also  $M.dJ/dt = 0$ , dann erhalten wir als erste Annäherung für den primären Stromkreis folgendes System von Gleichungen, welches von dem secundären vollständig unabhängig ist:

$$(1) \quad i = -c \frac{dv}{dt}, \quad (6) \quad ri = v - l \frac{di}{dt}.$$

unter den genannten Bedingungen stellen diese Gleichungen eine schwingende Bewegung der Electricität dar.<sup>1)</sup>

§ 3. Nehmen wir als Zeitanfangspunkt den Moment der Unterbrechung des Batteriestromes, ist der absolute Werth des letzteren  $i_0$ , so haben wir für  $t=0$  die Anfangsbedingungen  $v=0$ ,  $i=-i_0$  (über das negative Vorzeichen siehe oben); die Integrale der Gl. (1) und (6) für  $v$  und  $i$  gestalten sich folgendermaassen:

$$(7) \quad v = i_0 \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{c} e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

1) Die zweite Annäherung, bei der ich jedoch wegen der complicirten Rechnungen nicht verweilen will, zeigt, dass die Wirkung des secundären Stromes auf den primären sich vor allem in der scheinbaren Aenderung des Selbstinductionscoefficienten des letzteren zeigt, der sich aus  $l$  in  $l(1 - (M^2/2L))$  verwandelt. Die Grösse  $M^2/Ll$  ist überhaupt gering. (Vgl. Helmholtz, Ges. Abh. 1. S. 463.

$$(8) \quad i = i_0 e^{-\alpha t} \left( Cs \beta t - \frac{a}{\beta} \cdot Sn \beta t \right).$$

Hierbei ist:

$$\alpha = \frac{r}{2l}, \quad \beta = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{lc} - \frac{r^2}{4l^2}};$$

$\tau$  bezeichnet die Periode einer vollen Schwingung.

Wir gehen nun zur Betrachtung des secundären Stromkreises über, und zwar nehmen wir ihn zuerst als geschlossenen an. Die Bewegung der Electricität wird hier durch die Gl. (5) dargestellt:

$$(5) \quad L \frac{dJ}{dt} + KJ = -M \frac{di}{dt}.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist eine bestimmte Function der Zeit; der Differentialquotient  $di/dt$  ergibt sich durch Differentiation der Gl. (8).

Die Gl. (5) kann man als eine lineare Differentialgleichung mit zweitem Theil betrachten; ihr Integral ist die Summe einer partiellen Lösung und des Integrals der Gleichung ohne zweiten Theil. Die erstere kann nur folgende Form haben:

$$ae^{-\alpha t} Cs \beta t + be^{-\alpha t} Sn \beta t,$$

wobei die Coëfficienten  $a$  und  $b$  so zu wählen sind, dass sie der Differentialgleichung genügen. Beachtet man noch die Bedingung  $J = 0$  für  $t = 0$  und führt die Bezeichnung  $\gamma = R/2L$  ein, so folgt:

$$J = -ae^{-2\gamma t} + ae^{-\alpha t} Cs \beta t + be^{-\alpha t} Sn \beta t.$$

Der Strom besteht somit aus einem nicht periodischen Theil, auf den sich ein periodischer superponirt. Die Decremento beider werden durch  $2\gamma$  resp.  $\alpha$  bestimmt. Die beiden letzten Glieder der vorhergehenden Gleichung können bekanntlich durch passende Aenderung der Amplitude und der Phase zusammengezogen werden.

Die genauen Werthe der Grössen  $a$  und  $b$  erhält man durch Einführung der partiellen Lösungen in die Gleichung und Gleichsetzen der entsprechenden Coëfficienten. Einfachere angenäherte Werthe erhalten wir durch folgende Ueberlegung. Man kann  $\gamma$  und  $\alpha$  als von derselben Grössenordnung annehmen, was für gewöhnliche Inductionsrollen vollkommen der Wirklichkeit entspricht. Bekanntlich ist

aber für eine Rolle aus dickem Draht, wie die primäre,  $r/2l$  verschwindend klein im Vergleich zu  $1/lc$ ; folglich verschwinden auch  $\alpha$  und  $\gamma$  gegen  $\beta$ . Beachten wir dies, so erhalten wir leicht  $b = 0$ ,  $a = (Mi_0/L)$ ; somit:

$$(9) \quad J = \frac{Mi_0}{L} \left( -e^{-\gamma t} + e^{-\alpha t} Cs \beta t \right).$$

Wir werden Gelegenheit haben, auf diese Gleichung zurückzukommen.

Wir gehen jetzt zu dem complicirteren Fall eines offenen secundären Stromkreises über und betrachten zunächst das Potential auf dem freien Ende desselben (das andere Ende wird als zur Erde abgeleitet vorausgesetzt).

Durch Elimination von  $J$  aus den Gl. (3) und (4) folgt:

$$(10) \quad \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{M}{LC} \frac{di}{dt}.$$

Der Differentialquotient  $di/dt$  ist ebenso wie im vorhergehenden Falle eine bestimmte Function der Zeit und ist aus der Gl. (8) zu erhalten.

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist die Summe einer partiellen Lösung von der Form  $ae^{-\alpha t} Cs \beta t + be^{-\gamma t} Sn \beta t$  und des Integrales der Gleichung mit Hinweglassung des zweiten Theiles.

Für dieses letztere kann man theoretisch drei Fälle unterscheiden. Das Integral kann 1. aperiodisch sein, wenn  $(R^2/4L^2) > (1/LC)$ ; 2. periodisch, wenn  $(R^2/4L^2) < (1/LC)$ ; 3. zwischen beiden ersteren Fällen liegen, wenn  $(R^2/4L^2) = (1/LC)$ . Alle diese drei Fälle sind in Wirklichkeit gleich möglich, und wir wollen sie deshalb der Reihe nach betrachten.<sup>1)</sup>

Wir bezeichnen wie früher  $R/2L$  mit  $\gamma$  und setzen im ersten Falle:

$$\sqrt{\frac{R}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \delta,$$

im zweiten:

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{4L^2}} = \delta' = \frac{2\pi}{T},$$

1) Eine besondere Discussion würde der Fall erfordern, wo die Schwingungsperioden des secundären und primären Stromkreises gleich sind. So interessant dieser Fall auch theoretisch sein möge, so wollen wir bei ihm doch nicht länger verweilen, da die Construction aller üblichen Inductionsapparate das Vorkommen dieses Falles in der Praxis ausschliesst.



wo  $T$  die Periode einer vollen Schwingung bedeutet; im dritten Falle ist  $\delta = \delta' = 0$ .

I. Fall.  $1/LC = \gamma^2 - \delta^2$ . Das Integral ist aperiodisch und  $V$  hat die Form:

$$V = A_1 e^{-(\gamma-\delta)t} + B_1 e^{-(\gamma+\delta)t} + a e^{-\alpha t} Cs \beta t + b e^{-\alpha t} Sn \beta t.$$

II. Fall.  $1/LC = \gamma^2 + \delta'^2$ . Das Integral ist periodisch.  
 $V = A_2 e^{-\gamma t} Cs \delta' t + B_2 e^{-\gamma t} Sn \delta' t + a e^{-\alpha t} Cs \beta t + b e^{-\alpha t} Sn \beta t.$

III. Fall.  $1/LC = \gamma$ :

$$V = A_3 e^{-\gamma t} + B_3 t e^{-\gamma t} + a e^{-\alpha t} Cs \beta t + b e^{-\alpha t} Sn \beta t.$$

Die Grössen  $a$  und  $b$  ergeben sich wie vorher aus der Bedingung, dass die partielle Lösung der Differentialgleichung genügt.  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  erhält man aus den Bedingungen  $V = 0, J = 0$ , für  $t = 0$ .

Die genauen Werthe aller dieser Coëfficienten sind sehr complicirt. Auf Grund folgender Annahmen kann man einfachere angenäherte Grössen erhalten. Wir nehmen wie früher an, dass  $\gamma$  und  $\alpha$  von derselben Ordnung sind, d. h. im Vergleich zu  $\beta$  sehr klein. Ferner ist  $\delta < \gamma$ , denn  $\gamma^2 - \delta^2 > 0$ . Was  $\delta'$  betrifft, so braucht man es nicht in Vergleich zu  $\beta$  als verschwindend klein anzunehmen, obwohl es thatsächlich sehr viel kleiner, d. h. die Schwingungsperiode im secundären Stromkreise entsprechend grösser als im primären ist. Durch Einführung aller dieser Vereinfachungen bekommen wir für  $V$  und ebenso für  $J = -C.dV/dt$  folgende Ausdrücke:

I. Fall.

$$(11) \quad V = \frac{M i_0}{LC} \left[ \frac{1}{2\delta} (e^{-(\gamma-\delta)t} - e^{-(\gamma+\delta)t}) - \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} Sn \beta t \right]$$

$$(12) \quad J = \frac{M i_0}{L} \left[ \frac{\gamma - \delta}{2\delta} e^{-(\gamma-\delta)t} - \frac{\gamma + \delta}{2\delta} e^{-(\gamma+\delta)t} + e^{-\alpha t} Cs \beta t \right].$$

II. Fall.

$$(13) \quad V = \frac{M i_0}{LC} \frac{1}{1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}} \left[ \frac{1}{\delta} e^{-\gamma t} Sn \delta' t - \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} Sn \beta t \right]$$

$$(14) \quad J = \frac{M i_0}{L} \frac{1}{1 - \frac{\delta^2}{\beta^2}} [-e^{-\gamma t} Cs \delta' t + e^{-\alpha t} Cs \beta t].$$

## III. Fall.

$$(15) \quad V = \frac{Mi_0}{LC} \left[ te^{-\gamma t} - \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{Sn} \beta t \right]$$

$$(16) \quad J = \frac{Mi_0}{L} [\gamma t - 1] e^{-\gamma t} + e^{-\alpha t} Cs \beta t.$$

§ 4. Die obigen Gleichungen geben uns ein übersichtliches Bild von den Vorgängen innerhalb des secundären Stromkreises. Betrachten wir zunächst die zeitlichen Aenderungen des Potentials. Es stellt im ersten Falle die Summe der beiden ersten Glieder, im dritten das erste Glied in dem Ausdrücke für  $V$  eine von Null anwachsende Grösse dar, die nach Erreichung eines Maximums sich asymptotisch wieder der Null nähert. Man könnte sie mit einer Welle vergleichen, die anfangs schnell anwächst, dann allmählich wieder abnimmt. Im zweiten Fall bemerken wir, dass  $V$  nach Erreichung des ersten Maximums schon bei endlichem  $t$  wieder Null wird und darauf periodisch das Vorzeichen wechselt, d. h. nach der ersten Welle folgen weitere, mit allmählich bis zum Verschwinden abnehmender Amplitude. Das letzte Glied in dem Ausdrücke für  $V$  stellt in allen drei Fällen den Einfluss der alternirenden Bewegung der Electricität im primären Stromkreise auf den secundären Stromkreis dar. Wenn man von dem gemeinsamen Factor aller Glieder absieht, so sind die ersten Glieder ausschliesslich vom secundären Stromkreise abhängig, das letzte Glied dagegen nur vom primären.

Oben war erwähnt, dass  $\delta$  und  $\delta'$  überhaupt im Vergleich zu  $\beta$  klein sind, woraus folgt, dass im Ausdrücke für  $V$  die ersten Glieder Wellen darstellen, die sich durch grössere Amplitude und längere Periode auszeichnen; auf diese superponiren sich kleinere, kürzere Wellen, hervorgebracht durch die Einwirkung der electrischen Schwingungen des primären Stromkreises auf den secundären.

Wir wenden uns nun zum Strome  $J$ . Derselbe ist anfangs negativ (gleichgerichtet mit dem abnehmenden primären Strome); darauf ändert er in allen drei Fällen schon bei endlichem  $t$  das Vorzeichen. Im zweiten Falle folgen nach dem ersten Zeichenwechsel andere; wir haben hier einfach die Aufeinanderlagerung zweier Schwingungen von verschiedener Periode. Im ersten Falle nimmt von den beiden ex-

ponentialen Gliedern das negative mit der grösseren anfänglichen Amplitude schneller ab als das positive, sodass der Strom bald positiv wird; das dritte Glied, das bei weitem schnellere Schwingungen darstellt, ändert nicht wesentlich das Resultat. Ebenso muss auch im dritten Falle unter Vernachlässigung des dritten Gliedes der Strom bei  $t = 1/\gamma$  sein Zeichen ändern. In beiden Fällen wächst der Strom nach der Aenderung des Vorzeichens bis zu einem gewissen Maximum, um sich hierauf wieder asymptotisch der Null zu nähern.

Die physikalische Deutung aller dieser Vorgänge ist leicht verständlich. Der Inductionsstrom ist an und für sich schwach, bei weitem schwächer als der primäre, da im Factor  $M/L$   $M$  stets kleiner als  $L$  ist; ausserdem ist er so zu sagen „träge“ infolge der grossen Selbstinduction. Ist er aber allmählich in Wirkung getreten, so wird es, wegen derselben Ursache schwer, ihn zu hemmen und er staut die Electricität bis zu einem hohen Potential an den freien Enden der Rolle an. Hat  $V$  sein Maximum erreicht, so wird  $J = 0$ , und darauf beginnt die umgekehrte Bewegung der Electricität durch die Rolle. Die Entladung ist im ersten und dritten Falle eine aperiodische, im zweiten eine periodisch-oscillatorische. Zu allem diesen kommt noch hinzu in Form von kleineren Wellen die Einwirkung der electrischen Schwingungen des primären Stromkreises.

Zum Schluss erwähnen wir noch einiges über den Coëfficienten  $M_0/LC$ , den gemeinsamen Factor aller Amplituden des Potentials, dem proportional die Wirkung des Inductionsapparates unter sonst gleichen Bedingungen anwächst. Möglichst kleine  $C$  und  $L$  bei möglichst grossem  $M$  ergeben den Maximalwerth dieses Factors. Es wäre zu erwähnen, dass hier wie auch auf anderen Gebieten, z. B. auf dem der musikalischen Instrumente, die Erbauer der Apparate früher als jede Theorie die Aufgabe einigermaassen empirisch gelöst haben. Die Zerlegung der Rolle in mehrere Abtheilungen, wodurch sie ursprünglich vor dem Durchschlagen der Funken geschützt werden sollte, vermindert ihre electrostatische Capacität  $C$ , indem sie die Entstehung bedeutender Potentialdifferenzen zwischen den Drahtschichten verhindert. Die

lange Form der Inductionsrolle, die die inducirende umgibt, bewirkt bei gegebener Windungsanzahl ein Kleinerwerden von  $L$  und eine Vergrößerung von  $M$ . Schliesslich spielt ohne Zweifel das Drahtbündel keine unwichtige Rolle, obgleich die Complicirtheit der Frage nach der Magnetisirung, sowie einigen dieselbe begleitenden Nebenerscheinungen (Verspätung und dergl.) nur muthmaassend und in allgemeinen Zügen über seine Wirkung zu sprechen erlaubt. Wäre die Magnetisirung des Drahtbündels in Wirklichkeit dem magnetisirenden Strom und der Windungsanzahl der magnetisirenden Drahtrolle proportional, wie wir es vorausgesetzt haben, so würde das Bündel auf  $M$  und  $L$  nahezu gleich wirken, und wir hätten von ihm wenig Nutzen. Das magnetische Moment eines dicken Bündels jedoch, das noch lange nicht bis zur Sättigung magnetisirt ist, und von dem schwache Ströme nur die oberen Schichten und nur stärkere die ganze Masse zu magnetisiren vermögen, wächst bei weitem schneller als der magnetisirende Strom. Das Drahtbündel bewirkt also infolge der grösseren Intensität des primären Stromes besonders die Vergrößerung von  $M$  und wirkt dabei nur wenig auf  $L$  ein. Man überzeugt sich leicht, dass die Wirkung des Apparates nach der Entfernung des Drahtbündels unverhältnissmässig schwächer wird. Der wichtigste Schritt in der weiteren Erforschung des Ruhmkorff'schen Apparates würde meiner Meinung nach in einer genauen Untersuchung der Wirkungsweise des Drahtbündels bestehen.

## II. Experimenteller Theil.

§ 5. Die experimentelle Prüfung der oben auseinander-gesetzten theoretischen Resultate ist hauptsächlich nach der Methode des rotirenden Spiegels ausgeführt worden. Anfangs untersuchte ich auf diesem Wege den Funken des Ruhmkorff'schen Apparates in der Luft, ging aber bald zu dem Gebrauch einer Geissler'schen Röhre über, mit der man im wesentlichen dieselben Resultate, aber klarer und deutlicher erhalten konnte. Zwar bedingt in beiden Fällen die Einführung einer Funkenstrecke, die der Strom in Form einer leuchtenden Entladung durchbricht, gewisse neue Complicationen, welche in den oben aufgestellten Gleichungen

nicht berücksichtigt worden sind; eine solche Funkenstrecke vermehrt bekanntlich im Stromkreise nicht nur den Widerstand, sondern ruft auch eine neue electromotorische Kraft hervor. Letztere ist aber jedenfalls verschwindend klein im Vergleich zu der gesammten electromotorischen Kraft in dem Inductionskreise. Nur wenn letztere unter eine gewisse Grenze herabsinkt, durchdringt der ihr entsprechende Strom nicht die Röhre, und in der Lichterscheinung (des rotirenden Spiegels) treten Lücken in Form dunkler Stellen auf.

Die Anordnung der Versuche war folgende: Eine gewöhnliche Spectralröhre war mit schwarzem Papier beklebt, in dem der Länge nach ein feiner Spalt ausgeschnitten war; der Spalt erstreckte sich über die ganze Röhre, auch über die breiten Theile derselben bis in die Nähe der Electroden, und war nur an den Uebergangsstellen des mittleren schmalen Theiles in die breiten unterbrochen. Die Röhre wurde vertical vor einem Spiegel, der mittelst Schnurlaufes von einem Uhrwerk in sehr gleichmässige Rotation um seine Verticalaxe versetzt werden konnte, aufgestellt. An dem Spiegel war eine Vorrichtung angebracht, mit deren Hülfe der Strom in dem Moment, wo der Spiegel dem Beobachter zugekehrt war, unterbrochen wurde.

Man erhielt auf diese Weise durch Aufeinanderlagerung der einzelnen Lichterscheinungen den Eindruck eines ruhenden continuirlichen Lichtbildes. Nur wenn der primäre Strom sehr stark war oder grosse Drahtrollen in denselben eingeschaltet waren, war der Unterbrechungsfunke andauernd und die Lichterscheinung im Spiegel verrieth ebenfalls eine allmähliche Stromunterbrechung und einen bedeutenden Energieverlust. In diesen Fällen nahm ich meine Zuflucht zu anderen Unterbrechern (einem Interruptor von Foucault oder der Vorrichtung bei meinem Oscillometer), bei welchen die Stromunterbrechung plötzlicher erfolgte. Ein Hin- und Herhüpfen des Lichtbildes vor den Augen musste ich mir dabei freilich gefallen lassen.

Es war oben bereits darauf hingewiesen, dass an Stelle des Condensators am Apparate ein zweiter, besonderer, gebraucht wurde. Derselbe bestand aus 300 Staniolblättern, die durch doppelte Lagen dicken, mit Paraffin getränkten

Papiers voneinander getrennt waren. Die Isolation liess nichts zu wünschen übrig; die Gesamtcapacität betrug ungefähr 5,3 Mikrofarad, und man konnte den Condensator in sechs Theile zu je 50 Blättern zerlegen. Die in der Mehrzahl der Versuche in den primären Stromkreis eingeschalteten Rollen waren aus dickem Draht, jedoch ohne Drahtbündel angefertigt; ihr Selbstinductionscoëfficient übertraf bedeutend die Selbstinduction der primären Rolle am Apparate selbst. Sie hatten, wie oben auseinandergesetzt, den Zweck, eine grössere und dabei beliebig veränderliche Annäherung an die theoretischen Voraussetzungen zu erzielen, indem die Reaction des secundären Stromkreises nur auf einen Theil des primären, nämlich nur auf die primäre Rolle des Inductoriums ausgeübt wurde. Bei ihrem Gebrauche gab letzteres bei gegebener Anzahl von Elementen zwar eine bedeutend schwächere, aber viel regelmässige Entladung.

Wir wollen im Folgenden den geschlossenen und den offenen secundären Stromkreis gesondert betrachten.

### § 6.

#### I. Fall. Der secundäre Stromkreis geschlossen.

Wir hatten oben für den Inductionsstrom in diesem Falle folgenden Ausdruck:

$$J = \frac{M i_0}{L} [-e^{-\gamma t} + e^{-\alpha t} C s \beta t],$$

wo  $\gamma = R/2L$ ,  $\alpha = r/2L$ ,  $\beta = 2\pi/\tau$ . Mit einem aperiodischen Theile, der nach dem Gesetze einer Exponentialcurve abnimmt, combinirt sich ein periodischer mit abnehmender Amplitude, letzterer als Resultat der Wirkung der electrischen Schwingungen im primären Stromkreise auf den secundären. Die Periode, sowie die Dämpfung der Schwingungen sind dieselben wie die im primären Schliessungskreise und hängen nur von der Beschaffenheit desselben ab, während das erste Glied ausschliesslich durch den secundären Stromkreis bedingt ist.

Die Inductionsrolle eines grossen Ruhmkorff'schen Apparates (Funkenlänge 30—40 cm) gab bei Einschaltung einer grossen Ergänzungsrolle und der Gesamtcapacität

des Condensators in den primären Stromkreis die in Fig. 4 dargestellte Lichterscheinung. Man konnte deutlich eine Reihe heller verticaler Streifen von gleicher Breite und röthlicher Färbung sehen, die voneinander nicht durch dunkle, sondern durch nur weniger helle Zwischenräume getrennt waren. Die Schärfe der Streifen, d. h. der Contrast zwischen der hellen Mitte und den ebengenannten Zwischenräumen nahm allmählich ab, bis die Erscheinung schliesslich in einen langen Schweif überging, in dem die Helligkeit nicht mehr intermittirend war, sondern gleichmässig und stetig abnahm. Die in der Figur sichtbaren Horizontalstreifen entsprechen den Schichtungen des Lichtes in dem schmalen, centralen Theile der Röhre. Ihre Wellenform deutet auf eine Bewegung der Schichten während der Entladung hin.

Im oberen und unteren Theile der Figur sind die Lichterscheinungen in den breiten Theilen der Röhre dargestellt. Sie sind vom centralen Theile durch schwarze, durch das Fehlen des Spaltes erzeugte Zwischenräume getrennt. An der negativen Electrode (unten) sieht man kuppenförmige Gebilde von intensiv hellblauer Farbe, in denen das röthliche Licht des mittleren Theiles der Röhre endet. An der positiven Electrode (oben) hat die Erscheinung die in der Figur dargestellte seltsame Form, welche auf das Vorhandensein rasch bewegter Schichten deutet; die Farbe derselben ist zart bläulich. Diese Erscheinungen gestatten in jedem Moment eine sichere Erkennung der Stromesrichtung.

Ein Anblick der Fig. 4 lehrt, dass wir in der That die Aufeinanderlagerung zweier Ströme vor uns haben, eines aperiodischen und eines periodischen. Die Banden sind das Resultat des letzteren. Jede Aenderung der Capacität des Condensators oder der in den primären Stromkreis eingeschalteten Ergänzungsrollen bedingt infolge der Veränderung der Schwingungsperiode ein Schmal- oder Breiterwerden der Streifen, wobei übrigens der allgemeine Charakter derselben unverändert bleibt. Die Anwesenheit des oben erwähnten Schweifes weist darauf hin, dass der aperiodische Theil im gegebenen Falle verhältnissmässig langsam abnimmt; er dauert noch nach dem Verschwinden des periodischen fort. Die Abwesenheit dunkler Zwischenräume zwischen den



Streifen, sowie die Erscheinungen in der Nähe der Electroden beweisen, dass die algebraische Summe beider Ströme niemals Null wird oder, besser gesagt, niemals dasjenige Minimum erreicht, bei welchem der Strom nicht mehr durch die Geissler'sche Röhre hindurchgehen kann, und dass der Strom während der ganzen Entladung sein Vorzeichen nicht ändert. Die Curve in Fig. 9 stellt den zeitlichen Verlauf der Stromintensität für diesen Fall dar. Die krumme punktirte Linie ist der aperiodische Theil; die zwei Geraden begrenzen das Gebiet, innerhalb welchem der Strom aufhört, durch die Geissler'sche Röhre zu fließen.

Beim Gebrauche einer kleineren Inductionsrolle (Funkenlänge ca. 2 cm) stellt sich die Erscheinung in etwas veränderter Form dar (Fig. 5). Die Streifen sind hier durch vollkommen dunkle Zwischenräume getrennt; in der Mitte eines jeden der letzteren tritt ein schmaler heller Streifen hervor. Der Schweif fehlt, und die Lichterscheinung bricht bei einem der schwarzen Zwischenräume ab. Die Form derselben in der Nähe der Electroden zeigt, dass der den kleinen schmalen Streifen entsprechende Strom eine dem Hauptstrom der Entladung entgegengesetzte Richtung hat. Alles dieses kann folgendermaassen gedeutet werden: der aperiodische Theil des Stromes, der ausschliesslich von der Beschaffenheit des secundären Stromkreises abhängt, nimmt jetzt verhältnissmässig schnell ab, während der periodische nahezu unverändert bleibt; er hängt vom primären Stromkreise ab, der wegen der eingeschalteten Ergänzungsrollen nur wenig durch die Vertauschung der Inductionsrolle beeinflusst wird. Der periodische Theil erhält das Uebergewicht und bedingt den periodischen Zeichenwechsel des resultierenden Stromes. Fig. 10 stellt die Stromcurve für diesen Fall dar.

Man ersieht leicht, weshalb in grossen Ruhmkorff'schen Apparaten der aperiodische Strom  $\text{const. } e^{-2\gamma t}$  langsamer abnimmt als in kleinen. Der Dämpfungscoefficient  $2\gamma = R/L$  hat im Zähler den Widerstand der Inductionsrolle, im Nenner ihren Selbstinductionscoefficienten. Bei gegebener Drahtdicke wird der Widerstand, wenn man die Windungszahl  $n$  Mal vergrössert, in demselben Verhältniss

zunehmen, während der Selbstinductionscoefficient fast proportional  $n^2$  wächst; es ist daher ersichtlich, dass  $R/L$  für grosse Inductionsrollen kleiner sein muss als für kleine.

Nachfolgender einfacher Versuch beweist die Richtigkeit der vorhergehenden Ausführungen. Wenn man in einem grossen Inductorium  $R$  durch Einschaltung einer nassen Schnur von geeigneten Dimensionen vergrössert, so erhält man eine schnellere Abnahme des aperiodischen Stromes, und die Lichterscheinung erhält dasselbe Aussehen, wie bei einem kleineren Apparat.

Aus dem oben Angeführten ist ersichtlich, dass die experimentelle Untersuchung des Stromes im geschlossenen Ruhmkorff'schen Apparat vollkommen die theoretischen Erwartungen bestätigt. Zum Schluss bemerke ich noch, dass man mit einem guten Inductionsapparat die oben beschriebenen Streifen auch ohne Einschaltung von Ergänzungsrollen in den primären Stromkreis sehen kann. Sie sind freilich in diesem Falle schmal und nicht ganz regelmässig und treten auch nur in beschränkter Anzahl auf, nicht mehr als 4–6, während man mit eingeschalteten Ergänzungsrollen unter günstigen Umständen ihrer bis 20 und mehr zählen kann.

### § 7.

#### II. Fall. Der secundäre Stromkreis offen.

Zur Prüfung der Theorie können im vorliegenden Falle zwei Methoden angewandt werden: 1. die Untersuchung des Stromes, 2. die unmittelbare Untersuchung der Potentialänderungen. Da Strom und Potential in bestimmtem mathematischen Zusammenhange stehen, so sind theoretisch beide Methoden gleichberechtigt und müssen zu demselben Endresultat führen. Die praktischen Schwierigkeiten sind bei beiden jedoch sehr ungleich.

Zur Untersuchung des Stromes liess sich wie vorher, wenn auch den neuen Bedingungen entsprechend mit einigen Modificationen, die Methode der Geissler'schen Röhre und des rotirenden Spiegels mit Erfolg anwenden. Zu denselben Resultaten führte auch der Gebrauch des Oscillometers. Was die Untersuchung der Potentialänderungen anbetrifft, so muss ich gestehen, dass meine Versuche in dieser Richtung, trotz

der angewandten Mühe und Zeit, ohne positives Resultat geblieben sind. In der Folge will ich einiges über sie erwähnen; zunächst wende ich mich zu der Untersuchung des Stromes.

Die Versuchsanordnung war folgende. Zwei möglichst gleiche Batterien, jede aus 4 Leydener Flaschen von angenähert gleicher Capacität, waren isolirt aufgestellt. Die äusseren Belegungen waren je mit den Polen des Inductionsapparates verbunden, die inneren unter sich durch die Geissler'sche Röhre oder durch die Rolle des Oscillometers. Wir können voraussetzen, dass die Gegenwart der Geissler'schen Röhre oder der Rolle, deren Selbstinduction im Vergleich zu der der secundären Rolle des Inductoriums verschwindet, keine neuen Complicationen mit sich führt. Die zwei Batterien sind also treppenartig (en cascade) aufgestellt, in welcher Lage die Gesammtcapacität des Systems bekanntlich gleich der halben Capacität einer jeden Batterie für sich ist.

Offenbar sind hier die theoretischen Forderungen im genügenden Grade erfüllt. Die Enden des Inductionsstromkreises werden geladen und entladen sich darauf von neuem durch die Drahtrolle selbst; die electricische Capacität ist zwar nicht ausschliesslich an den Enden der Rolle concentrirt, doch ist die eigene Ladung der Rolle verhältnissmässig nur gering und ist um so weniger von Belang, je grösser die Capacität der Batterie ist. Die Ladung und Entladung der äusseren Belegungen erzeugt in den die inneren Belegungen verbindenden Leitern einen Strom, der mit genügender Annäherung in jedem Momente dem Strome im secundären Schliessungskreise, der in den äusseren Belegungen endet, gleichgesetzt werden kann.<sup>1)</sup> Diesen Strom können wir mit Hülfe der genannten zwei Methoden untersuchen.

Mit Hülfe eines gut isolirten Commutators war es möglich, schnell je drei Flaschen aus jeder Batterie auszuschalten, sodass nur je eine Wirkung blieb, wodurch die Capacität der Batterie angenähert viermal kleiner wurde. In den pri-

1) Es wird vorausgesetzt, dass man die Electricitätsmengen auf beiden Belegungen als gleich annehmen kann.

mären Stromkreis konnten dieselben Ergänzungsrollen wie oben eingeschaltet werden oder aber zickzackförmige Neusilberdrähte von demselben Widerstande wie die Rollen. Als Condensator diente der früher beschriebene. Zur Erzeugung des Stromes dienten 8 Bunsen-Elemente.

Bei dem grossen Ruhmkorff'schen Apparate wies die Lichterscheinung im Spiegel je nach den Umständen, folgende charakteristische Züge auf. Die Fig. 6, 7, 8 stellen einige der hierher gehörigen Fälle dar.

Wenn in den primären Stromkreis keine Rollen, sondern nur ein zickzackförmiger Widerstand von angenähert 2 Ohm (um den Strom und die Funken im Unterbrecher beim Spiegel etwas zu schwächen), in den secundären aber je 4 Leydener Flaschen eingeschaltet waren, so hatte das Lichtbild die in Fig. 6 dargestellte Form. Die Erscheinung begann mit einem ziemlich breiten Streifen, dem ein Strom mit unverändertem Vorzeichen entspricht; dann folgte eine dunkle Zwischenstelle und darauf ein allmählich erlöschender Schweif entsprechend einem Strome mit entgegengesetztem Zeichen. Der Schweif war continuirlich und zeigte nicht die geringste Spur von Zergliederung. Die kleinen Festons auf den Horizontalstreifen des geschichteten Lichtes, sowohl den rothen als auch besonders den blauen in der Nähe der positiven Electrode, sind die Wirkung der electricen Schwingungen des primären Stromkreises; schaltet man in den letzteren eine kleine Drahtrolle ein, so werden die Festons breiter und deutlicher.

Wir haben hier offenbar, und zwar in ganz reiner Form denjenigen Fall der electricen Bewegung, welcher durch das exponentiale (aperiodische) Integral der differentialen Grundgleichung dargestellt wird.

Fig. 8 stellt die Veränderungen dar, welche in der Erscheinung durch Einschaltung einer grossen Rolle in den primären Stromkreis anstatt des zickzackförmigen Widerstandes bedingt werden. Anfangs sieht man einen undeutlichen röthlichen Schein, der offenbar durch die nicht genügend schnelle Unterbrechung des primären Stromes hervorgerufen wird (und in der That sah man im Unterbrecher einen sehr starken Funken). Darauf folgen scharfe breite

Streifen, die von den electrischen Schwingungen des primären Stromkreises herrühren: die zwei ersten sind voneinander nicht getrennt, während der dritte scharf von dunklen Zwischenräumen begrenzt ist. Zum Schluss sieht man einen Schweif, in dessen Anfang noch deutliche Spuren der allmählich abnehmenden Schwingungen zu sehen sind. Die Fig. 11 zeigt uns die für diesen Fall aus der Gl. (12) des § 3 genau berechnete Stromcurve. Durch eine passende Wahl der Parameter ergab sich die Möglichkeit, auch solche kleine Eigenheiten zum Ausdruck zu bringen, wie das Zusammenhängen der beiden ersten Streifen und die Absonderung des dritten durch dunkle Zwischenstellen von ungleicher Breite. Ein Vergleich der Fig. 8 und 11 ergibt dieses alles ohne weitere Erörterungen. Bei der Verringerung der Capacität des primären Condensators um das dreifache werden die Streifen schmaler; man erblickt deren vier und ausserdem noch einen sehr feinen inmitten der folgenden dunklen Zwischenstelle. Der Charakter des Schweißes bleibt im allgemeinen unverändert.

In den beiden beschriebenen Fällen haben wir zwar ein aperiodisches Integral vor uns, befinden uns jedoch hart an der Grenze, wo dasselbe in ein periodisches übergeht. Wenn man mit den Enden der Inductionsrolle je eine Flasche, statt vier, verbindet, so wird der Strom sofort periodisch. Sind im primären Stromkreise keine Ergänzungsrollen, so hat die Erscheinung die Form der Fig. 7. Es sind drei scharf begrenzte Streifen zu unterscheiden; der Strom ändert zweimal das Zeichen. Die Streifen sind nach Augenmaass ungefähr zweimal so schmal wie bei vier Flaschen, wie es auch die Theorie erfordert (ihre Breite ist der Quadratwurzel aus der Capacität proportional). Ueber sie lagern sich die von den Schwingungen des primären Stromkreises herrührenden Festons.

Man erklärt sich leicht den Uebergang der aperiodischen Electricitätsbewegung in die periodische. Letztere wird bedingt durch die Ungleichung  $R_2/4L_2 < 1/LC$ , während der aperiodischen Bewegung die Ungleichung  $R_2/4L_2 > 1/LC$  entspricht. Es ist ersichtlich, dass durch Verkleinerung von  $C$  die letztere Ungleichung in die erstere übergehen kann.

Auch bei vier Flaschen wird der Strom sofort periodisch, wenn man den Unterbrecher beim Spiegel durch einen anderen, schärfer wirkenden ersetzt; anstatt des Schweifes erscheinen zwei Streifen von ebensolcher Breite wie der erstere, mit wechselnden Stromzeichen. Weshalb eine schnellere Unterbrechung des primären Stromes und eine Verminderung seines Energieverlustes sich solcher Art auf den secundären Stromkreis überträgt, ist eine ziemlich complicirte Frage, auf deren Erörterung ich mich hier nicht einlassen will. Bei einer noch grösseren Flaschenzahl gelang es mir mit keinem Unterbrecher, einen Uebergang des Stromes in einen periodischen zu beobachten.

Andererseits versuchte ich die Erscheinung bei kleineren Capacitäten zu studiren. Ich gebrauchte statt der Flaschen zwei Paar Scheiben von 20 cm Durchmesser, die voneinander durch dicke Glasplatten getrennt waren. Die Lichterscheinung trat jedoch alsdann in Form einzelner heller, auf dunklem Grunde vertheilter Streifen auf. Augenscheinlich war hier der Strom zu schwach und hatte meistens nicht die genügende Stärke, um die Geissler'sche Röhre durchbrechen zu können. Die erwähnten Streifen sind gleich wie Inseln im Ocean, Gebirgsgipfel eines im Wasser versunkenen Continents; begreiflicherweise lässt ihre Vertheilung nur Muthmaassungen über die Höhenverhältnisse des letzteren zu.

Die Anwendung des Oscillometers, dessen Rolle an Stelle der Geissler'schen Röhre eingeschaltet wurde, bestätigte vollkommen alle oben erwähnten Resultate. Da aber der Unterbrecher bei diesem Apparate (Platincontact in Alkohol) bei weitem besser wirkte als der beim Spiegel, so ergab sich die electricische Bewegung bei vier Leydener Flaschen immer als periodisch. Es traten zwei volle Wellen deutlich hervor, d. h. vier halbe Wellen mit abwechselndem Vorzeichen. Die Wellenlänge änderte sich entsprechend der Theorie mit der Aenderung der Capacität der Flaschen. Auf diesen Wellen waren jedoch keine Spuren von kürzeren Schwingungen zu sehen, welche von der Wirkung des primären Stromkreises herrühren. Es erklärt sich dieses daraus, dass der Apparat überhaupt um so unempfindlicher wird, je schneller die Schwingungen sind; überdies war seine Rolle aus dickem

Draht mit nur geringer Windungsanzahl für diese Versuche wenig geeignet; sie entsprach ganz und gar nicht dem feinen mehrere Kilometer langen Draht der Inductionsrolle.

Die Versuche mit einem kleinen Ruhmkorff'schen Apparat ergaben im wesentlichen dieselben Resultate wie die mit dem grossen. Der Strom erwies sich stets als periodisch, war jedoch, wie man auch erwarten musste, bedeutend schwächer. Der Einfluss des primären Stromkreises machte sich mehr bemerkbar. So gewannen z. B. bei Einschaltung einer grossen Ergänzungsrolle in diesen Stromkreis und des Condensators mit seiner ganzen Capacität die den Schwingungen im primären Stromkreise entsprechenden Streifen vollkommen das Uebergewicht; der Einfluss des secundären Stromkreises macht sich nur in der ungleichmässigen Vertheilung ihrer Helligkeit und ihrer Breite geltend.

Aus allem Gesagten geht hervor, dass auch für den offenen secundären Stromkreis die Resultate der Theorie durch den Versuch vollkommen bestätigt werden. In Betreff der Differentialgleichungen 1—4 und ihrer Integrale 11—16 kann man deshalb behaupten, dass sie in der That der mathematische Ausdruck der thatsächlichen Vorgänge in der Inductionsrolle sind. Die Beseitigung der künstlich der Erscheinung aufgezwungenen Bedingungen ändert nicht das Wesen der Sache; so vernichtet z. B. die Entfernung der Ergänzungsrollen aus dem primären Stromkreise die electrischen Schwingungen in ihm nicht; sie werden nur rascher, weniger regelmässig und stärker gedämpft; letzteres ist eine Folge der Wirkung des Drahtbündels im Apparate und der Beeinflussung des primären Stromkreises durch den secundären; ebenso erzeugen schon kleine Leydener Flaschen, mit den Enden einer grossen Inductionsrolle verbunden, vollständig regelmässige Schwingungen im secundären Stromkreise; man muss annehmen, dass auch bei ihrer Beseitigung zum Ersatze derselben „die electrostatische Capacität der Rolle“ dienen kann. Schon die früheren Forscher auf diesem Gebiete, wie Schiller, Mouton und andere, haben sich mit Hülfe anderer Methoden von dem Vorhandensein ziemlich regelmässiger electrischer Schwingungen in kleinen Inductionsrollen mit isolirten Enden überzeugt. Bei der Vergrösserung



der Capacitäten an den Rollenenden geht die periodische Bewegung der Electricität in die aperiodische über, was auch vollkommen der Theorie entspricht.

§ 8. Zum Schlusse will ich noch einiges über meine Versuche, unmittelbar die Potentialänderungen auf den freien Enden der Inductionsrolle zu messen, erwähnen. Man sieht leicht, dass bei den im gegebenen Falle sehr schnell vor sich gehenden Aenderungen des Potentials keine auf Bewegung eines festen Körpers (der Nadel des Electrometers u. dgl.) gegründete Methode ein befriedigendes Resultat geben kann; die zu bedeutende Trägheit eines solchen Körpers würde ein unüberwindliches Hinderniss sein.<sup>1)</sup> Ich sah mich genöthigt andere Wege einzuschlagen.

Bei einer früheren Experimentaluntersuchung stiess ich zufällig auf eine Erscheinung, deren Verwendung für den vorliegenden Zweck mir geeignet erschien. Wenn man aus einer am Ende etwas verengten Glasröhre eine Gasflamme ausströmen lässt, und innerhalb der Röhre einen Metalldraht anbringt, der irgend wie nach aussen geführt ist, so schlägt jedes Mal, sobald der Draht eine electriche Ladung bekommt, die Flamme einen Augenblick aus dem Brenner, ähnlich wie es in den bekannten „akustischen Kapseln“ von Marey und König durch eine Bewegung der Membran geschieht.<sup>2)</sup> Die Röhre des Brenners muss einige Centimeter von der Ausgangsöffnung, und zwar vor der Stelle, wo der Draht angebracht ist, eine capillare Verengung haben; die Ausgangsöffnung selbst muss nicht zu eng und zu lang sein, damit das Gas freien Austritt hat. Zur schnelleren Verbrennung des Gases war meine Röhre von einer zweiten centriscch umschlossen, durch die ich Sauerstoff strömen liess.

Wurde der Brenner mit dem einen Ende einer Ruhm-

1) Im Oscillometer, wo dieses Princip angewandt wird, haben wir eine electromagnetische Wirkung, welche unvergleichlich intensiver als die electrostatische ist.

2) Es wäre wünschenswerth, diese Erscheinung genauer zu untersuchen; zur Zeit ist mir dies jedoch nicht möglich. Auch in der Literatur konnte ich nichts darauf bezügliches finden. Die positive und negative Ladung scheinen nicht gleich zu wirken; in einigen Fällen zieht sich die Flamme gleichsam in den Brenner zurück und schlägt darauf heraus.

korff'schen Inductionsrolle verbunden, deren anderes Ende zur Erde abgeleitet war, so konnte man im rotirenden Spiegel das Herausschlagen einer Flammenzunge beobachten. Ihre Form war jedoch so seltsam und so unregelmässig, dass es äusserst gewagt wäre, aus derselben irgend welche Schlüsse ziehen zu wollen, weshalb ich mich dessen enthalten will.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass das gesteckte Ziel durch Anwendung anderer Versuchsmethoden, welche auf dem Verhalten der Körper im starken electrischen Felde beruhen, hätte erreicht werden können (das Kerr'sche Phänomen, die von R. v. Helmholtz und Richarz gefundene Wirkung des Feldes auf einen Dampfstrom<sup>1)</sup> u. dgl.). Ich konnte jedoch nicht so viel Zeit auf eine Untersuchung verwenden, die im günstigsten Falle nur meine schon auf anderem Wege gefundenen Resultate bestätigen könnte.

Moskau, Januar 1891.

---

1) R. v. Helmholtz u. Richarz, Wied. Ann. 40. p. 161. 1890.

### VIII. Ueber die Zerstreuung der Electricität; von F. Narr.

1. Die Thatsache, dass sich die Electricität eines geladenen Leiters, der durch Stützen isolirt und von Luft von gewöhnlicher Dichte und Temperatur umgeben ist, auch ohne die sichtbare Gegenwart eines Leiters, zu dem disruptive Entladungen übergehen könnten, allmählich verliert, ist in älterer wie in neuerer Zeit mehrfach untersucht worden. Wenn wir trotzdem über die Erkenntniss dieses Vorganges, wie sie sich schon aus den Versuchen von Coulomb ergab, nicht wesentlich hinausgekommen sind, so beruht dies ebensowohl auf dem verwickelten Wesen wie auf der geringen Stärke desselben.

Der Einfluss der Stützen ist ein ebenso unzweifelhafter und unbestrittener wie schwer bestimmbarer; der Einfluss der umgebenden Luft ist noch schwerer zu definiren, weil hier neben den Theilchen derselben selbst, die sich überdies in die dem Gashäutchen des Leiters und in die dem freien Gase zugehörigen scheiden lassen, und des in ihr enthaltenen Wasserdampfes noch die in ihr suspendirten Staubtheilchen in Frage kommen. In neuester Zeit besteht, wie es scheint, viel Neigung, dieser letzteren neben der Ableitung durch die Stützen die Hauptrolle bei der sogenannten Zerstreuung der Electricität zuzuthemen.

Bei Gelegenheit einer Untersuchung, die sich auf ganz andere Ziele erstreckte, habe ich wieder einige Erfahrungen über die Zerstreuung gesammelt, die mir einiges Licht in dieses dunkle Gebiet zu werfen scheinen.

2. Meine Versuchsanordnung war kurz folgende. Mit einem Sinuselectrometer stand durch einen langen, dünnen Platindraht ein Quecksilbernäpfchen aus Schellack in Verbindung, das durch eine hölzerne Hebelvorrichtung sanft und rasch auf und ab bewegt werden konnte und dadurch einen 10 cm langen und 2 mm dicken Kupferdraht mit dem Queck-

silber und damit mit dem Electrometer in Verbindung setzte oder aus dieser Verbindung ausschaltete. Dieser Kupferdraht war endlich in einen Metallkörper eingelöthet, der verschiedenen Temperaturen ausgesetzt und hierbei durch die Verbindung mit dem Electrometer in seinem electrischen Verhalten untersucht werden sollte. Dieser Körper bestand aus einer Hohlkugel von 8 cm Durchmesser, die oben einen Tubulus besass, der durch eine zweite kleinere Kugel von 3 cm Durchmesser mittelst eines Gewindes so zu verschliessen war, dass scharfe Kanten absolut vermieden blieben; derselbe war aus Messing und besass durchweg eine hochpolirte Oberfläche.

Die Erwärmung dieser Hohlkugel geschah immer in der Weise, dass eine bestimmte Quantität siedenden Wassers durch die Oeffnung des Tubulus eingegossen wurde; dann wurde diese letztere durch einen gut passenden kleinen Kork verschlossen, der Kork längs der ebenen Endfläche des Tubulus abgeschnitten und hierauf endlich die kleinere Kugel aufgeschraubt, die noch durch ein angepresstes Lederchen den Korkverschluss sicherte und mittelst eines aufgehängten Seidenfadens den ganzen Metallkörper trug. Alle diese Manipulationen wurden natürlich unter Beobachtung aller möglichen Vorsichtsmaassregeln vorgenommen, sodass weder der Feuchtigkeitsgehalt der Luft im eigentlichen Versuchsraume, noch die Oberfläche des erwärmten Körpers und die Isolirung des ihn tragenden Seidenfadens irgend eine Aenderung erleiden konnten. Die grosse Wärmecapacität des Wassers im Verein mit dem geringen Ausstrahlungsvermögen der Metalloberfläche liessen nur eine sehr langsame Abkühlung des Metallkörpers zu und sicherten damit einen eine längere Zeit hindurch ziemlich unveränderlichen Wärmezustand oder auch eine Folge solcher Wärmezustände desselben. Eine irgendwie merkliche Ueberleitung von Wärme durch den eingelötheten Kupferdraht auf das Quecksilbernäpfchen fand nicht statt, was bei der geringen Dauer der Verbindung beider und den Dimensionen des ersteren nicht zu verwundern war.

3. Meine Versuche, soweit sie an dieser Stelle in Betracht kommen, bestanden einfach darin, dass ich in einem

bestimmten Augenblicke eine bestimmte Electrometerladung mittelst der Hebelvorrichtung auf die Messingkugel in einem bestimmten Wärmezustand übertrug, nach zwei Minuten die Ladung des Systems bestimmte und aus einer wiederholten Ablesung des Electrometers nach einer gewissen Anzahl von daran sich anschliessenden Minuten die mittlere Abnahme der Ladung in der Minute berechnete. In dieser Weise erhielt ich zunächst in zwei Versuchsreihen, die ich weiter unten näher charakterisiren werde, aus den Ablesungen am Ende der zweiten und sechsten Minute nach der Uebertragung der Electrometerladung folgende Zerstreuungszahlen im eben angegebenen Sinne:

I.	II.
-0,0050	-0,0074
+0,0056	+0,0074
-0,0051	-0,0072
+0,0052	+0,0070
	-0,0069

Bei einer jeden dieser zwei Versuchsreihen war die Kugel ursprünglich mit siedendem Wasser gefüllt; während sie sich dann  $\frac{3}{4}$  bis  $1\frac{1}{2}$  Stunden lang sich selbst überlassen abkühlte, wurden in regelmässigen Zeitintervallen die einzelnen Versuche vorgenommen, deren mittlere Zerstreuungszahlen in den Verticalreihen angegeben sind. Die Vorzeichen geben die Art der Ladung an, von der, wie auch schon Biot beobachtete, die Zerstreuung unabhängig ist.

Da mir diese Zahlen überdies darzuthun schienen, dass die Zerstreuung auch unabhängig sei von der Temperatur der Kugel, deren Capacität ungefähr ein Drittel von der Capacität des Electrometers war, so beschloss ich, diesem Umstand durch weitere Versuche bei möglichst verschiedenen Wärmezuständen der Kugel und unter möglichst günstigen und damit vergleichbaren äusseren Umständen klarzustellen. Ich wählte hier eine etwas andere (positive) Electrometerladung und leitete die mittleren Zerstreuungszahlen aus der Abnahme der Gesamtladung ab, die zwischen der zweiten und achten Minute nach der Electricitätsleitung beobachtet worden war. Ich stellte die Versuche in doppelter Weise an, indem ich zuerst die Kugel in gewöhnlicher Temperatur (kalt) und dann mit siedendem Wasser gefüllt (heiss)

untersuchte und dann in einer zweiten Versuchsreihe den letzteren Fall vorangehen und hierauf die Kugel sich selbst überlassen zwei Stunden lang sich abkühlen liess. Ich erhielt so folgende Zahlen:

I.		II.	
1) bei kalter Kugel	2) bei heisser Kugel	1) bei heisser Kugel	2) bei abgekühlter Kugel
0,0035	0,0039	0,0045	0,0040
0,0040	0,0045	0,0041	0,0040
0,0044	0,0049		

also im Mittel 0,0040 bei kalter oder abgekühlter und 0,0044 bei heisser Kugel. Hierbei verdient hervorgehoben zu werden, dass die nach der zweiten Minute beobachteten, derselben Versuchsreihe angehörigen Ladungen des Systems fast nie um ein ganzes Procent voneinander verschieden waren; so ergaben sich z. B. die zusammengehörigen Ladungen:

0,5723, 0,5730 und 0,5720, 0,5739

bei kalter und heisser, beziehungsweise heisser und abgekühlter Kugel.

4. Die Zerstreuungszahlen sind innerhalb derselben Versuchsreihe bei heisser Kugel durchaus etwas grösser als bei kalter oder abgekühlter. Diese Differenz ist jedoch nicht grösser als der Unterschied zwischen den Zerstreuungszahlen, die an der Kugel im gleichen Wärmezustande an verschiedenen Tagen beobachtet wurden; wenn wir also nur die Grösse dieser Differenz in Betracht zu ziehen hätten, so würden wir den verschiedenen Wärmezustand der Kugel überhaupt als nicht entscheidend erachten dürfen; dagegen spricht nur der bestimmte Sinn dieser Differenz. Wenn wir jedoch erwägen, welch lebhafte Strömungen die heisse Kugel im Gegensatze zur kalten umgeben und nothwendigerweise einzelne grössere „zufällig“ in der Nähe befindliche Staubtheilchen an die Oberfläche der Kugel führen müssen, so werden wir diesen Differenzen, die bei Einzelladungen als in die Grenze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler fallende zu bezeichnen wären und nur nach der Art ihrer Berechnung so zu behandeln sind, nur ein geringes Gewicht beimessen können. Diese Auffassung findet noch eine besondere Stütze in dem geringen Unterschiede zwischen den

Ladungen, die, wie oben erwähnt, am Ende der zweiten Minute bei den verschiedenen Wärmeszuständen der Kugel beobachtet wurden.

Da also die oben genannten Strömungen die Zerstreuungszahlen sehr wenig beeinflussen, so scheinen diese letzteren weder von dem freien Gase, noch von dem darin „unter den gewöhnlichen Verhältnissen suspendirten“ Staube, die ja im beständigen Wechsel an der heissen Kugel vorüberstreifen, der Hauptsache nach abzuhängen: es bleiben also als wesentliche Factoren der Zerstreuung nur noch die Ableitung durch die Stützen und durch das Gashäutchen übrig, welches alle Körper umgibt. Dass dieses letztere durch Temperaturerhöhungen, wie ich sie hier vorgenommen habe, wenig verändert wird, scheint mir aus allen bisherigen Erfahrungen hervorzugehen; ebenso steht es mit dem Isolirvermögen des stützenden Seidenfadens unter den besonders günstigen äusseren Verhältnissen (grosse Trockenheit der Luft), unter denen ich alle meine Versuche anstellte.

München, den 8. Juni 1891.

---



## IX. *Magnetische Experimentaluntersuchungen; von Carl Fromme.*

6. Abhandlung.

Ueber den Einfluss der Geschwindigkeit, mit welcher eine magnetisirende Kraft abnimmt, auf die Grösse des permanenten Momentes.

### § 1. Jetziger Stand der Frage.

Im Jahre 1863 beobachtete A. v. Waltenhofen<sup>1)</sup>, dass das permanente Moment dicker, verhältnissmässig kurzer, weicher Eisencylinder kleiner ausfällt, wenn man den magnetisirenden Strom plötzlich unterbricht, als wenn man ihn durch Einschaltung von Widerstand langsam auf Null bringt, ja dass öfters das permanente Moment ein dem temporären entgegengesetztes Zeichen annimmt (anomale Magnetisirung). Während v. Waltenhofen seine Beobachtung als eine Bestätigung der Hypothese von drehbaren Molecularmagneten ansah, machte G. Wiedemann<sup>2)</sup> im Jahre 1874 darauf aufmerksam, dass das geringere permanente Moment (*PM*) nach plötzlicher Unterbrechung des Stromes auch Folge der in der Masse der Eisenkerne inducirten Ströme sein könne, falls dieselben einen alternirenden Verlauf haben. Ausführliche Versuchsreihen, welche ich<sup>3)</sup> im Jahre 1878 veröffentlichte, zeigten jedoch, dass auch unter Vermeidung solcher Ströme, nämlich bei Bündeln voneinander isolirter dünner Eisendrähte die plötzliche Stromunterbrechung ein kleineres *PM* lieferte, als die langsame Schwächung der magnetisirenden Kraft. Sie erwiesen ferner, dass wie die Entmagnetisierungsgeschwindigkeit das permanente Moment, so die Magnetisierungsgeschwindigkeit das temporäre beeinflusst, indem dieses mit wachsender Geschwindigkeit wächst.

Im Jahre 1880 erschien ferner eine Arbeit von A.

1) A. v. Waltenhofen, Pogg. Ann. **120**. p. 650. 1863.

2) G. Wiedemann, Galvan. (2) **2**. p. 358. § 316.

3) C. Fromme, Wied. Ann. **5**. p. 345. 1878.

Righi<sup>1)</sup> über denselben Gegenstand, welche aber zum Theil schon bekannte Resultate brachte. Da derselbe mit Bündeln voneinander isolirter dünner Eisendrähte nicht experimentirt hatte, so machte G. Wiedemann in seinem Referat darauf aufmerksam, „dass sich die Resultate Righi's völlig aus dem Auftreten alternirender Inductionsströme in der Masse des Eisens beim schnellen Oeffnen des magnetisirenden Stromes u. s. f. ableiten lassen“. Dahingegen hielt ich meine Ansicht aufrecht<sup>2)</sup>, „dass ich durch meine Versuche mit Eisendrahtbündeln . . . . schon nachgewiesen zu haben glaube, dass Inductionsströme keinesfalls zur Erklärung ausreichen können.“

Indessen schien mir aus verschiedenen Gründen eine Wiederaufnahme der Versuche wünschenswerth. Während ich früher die langsame Schwächung der Kraft ausschliesslich durch langsames Ausziehen des Körpers aus der Magnetisirungsspirale bewirkt hatte, wandte ich später<sup>3)</sup> auch das Verfahren langsamer Widerstandseinschaltung an, fand aber dadurch die Erscheinungen nicht geändert. Durch die Versuche aus dem Jahre 1878 hatte ich den Einwand widerlegt, dass die Erscheinung Folge der in der Masse des Körpers inducirten Ströme sein könne; es erschien mir aber denkbar, dass Oscillationen und Alternationen des Extrastromes in der Spirale bei der Unterbrechung des magnetisirenden Stromes das kleinere *PM* verursachten. Es galt daher zu beweisen, dass ein kleineres Moment auch bei nicht alternirendem Verlauf des Oeffnungsextrastromes aufträte. Ich gebrauchte deshalb häufig eine Versuchsanordnung, die ich schon in der Arbeit vom Jahre 1878 angegeben hatte, und welche darin bestand, dass ich vor den Spiralen einen Kurzschluss, durch welchen sich der Extrastrom ausgleichen konnte, anbrachte, ehe ich die Batterie ausschaltete. In der That erhielt ich auch bei dieser Anordnung stets viel kleinere *PM* (als bei langsamer Schwächung der Kraft), wenn ein Eisenstab in der Spirale lag; dagegen erschien das *PM*

1) A. Righi, Beibl. 5. p. 62. 1881.

2) C. Fromme, Wied. Ann. 13. p. 326. 1881.

3) C. Fromme, 22. Ber. d. Oberh. Ges. f. Natur- u. Heilk. 1882; Wied. Ann. 18. p. 442. 1883.

von Eisendrahtbündeln nur bei der grössten angewandten Kraft, sowie bei den kleinsten Kräften etwas kleiner, bei mittleren Kräften aber sogar etwas grösser, als wenn man die Kraft durch allmähliche Widerstandsvermehrung bis auf Null schwächte.

Infolgedessen hielt G. Wiedemann<sup>1)</sup> daran fest, dass, wenn auch nicht Inductionsströme in der Masse des Körpers, so doch immer noch der Extrastrom der Oeffnung, sofern er alternirend verläuft, als Ursache der Erscheinung angesehen werden könne.

Eine nun folgende Arbeit von W. Peukert<sup>2)</sup> brachte zwar den Nachweis, dass eine schwache anomale Magnetisirung bei dicken Eisenkörpern auch dann beobachtet wird, wenn man durch einen kurzen Paralleldraht zu den Spiralen dem Oeffnungsextrastrom einen geschlossenen Weg bietet und so einen alternirenden Verlauf desselben vermeidet. Sie lieferte aber damit kein neues Moment für die Erklärung der Erscheinung, da ja meine ebenso angeordneten Versuche mit Eisenstäben früher schon erwiesen hatten, dass auch bei nicht alternirendem Oeffnungsextrastrom das *PM* mit wachsender Geschwindigkeit der Entmagnetisirung erheblich abnimmt.

Die letzte Arbeit über unseren Gegenstand ist von G. Wiedemann.<sup>3)</sup> Sie enthält einige Versuchsreihen mit zum Theil neuer Anordnung. Neu ist die Prüfung pulverförmiger Eisenkörper und die Verbindung der Endigungen der Magnetisirungsspirale mit den Belegungen eines Condensators. Bei Anwesenheit eines solchen nahm das *PM* der pulverförmigen Eisenkerne durch Stromunterbrechung noch stärker ab, dagegen hatte auf das *PM* eines massiven Eisenkernes der Condensator keinen Einfluss.

Das schliessliche Resultat auch dieser Arbeit war wieder: Werden Inductionsströme in der Masse des Körpers bei der raschen Reduction der magnetisirenden Kraft auf Null vermieden, so zeigt sich ein Abfall des permanenten Momentes nur dann, wenn die Möglichkeit von Oscillationen in der

1) G. Wiedemann, Electr. 4. 1. p. 279. 1885.

2) W. Peukert, Wied. Ann. 32. p. 291. 1887.

3) G. Wiedemann, Wied. Ann. 37. p. 610. 1889.

Magnetisirungsspirale (Alterniren des Extrastromes) nicht ausgeschlossen ist. Vermeidet man aber diese, so erhält man ein deutlich geringeres *PM* bei Drahtbündeln nicht, sondern nur bei Eisenstäben, es ist also dann nicht ausgeschlossen, dass die in der Masse des Eisens inducirten Ströme hierbei mitgewirkt haben.

Das Ziel der Untersuchung muss sein, eine derartige Versuchsanordnung zu finden, bei welcher weder in der Masse des Körpers Inductionsströme circuliren, noch auch ein Alterniren des Extrastromes eintritt. G. Wiedemann wendet die von mir zuerst benutzte Anordnung an (Drahtbündel, resp. pulverförmiger Eisenkern und Parallelschliessung zur Spirale), und findet dann freilich keinen Unterschied der *PM* bei langsamer und rascher Reduction der Kraft. Meines Erachtens sind aber seine Magnetometerablenkungen zu klein, als dass man aus ihnen auf die vollkommene Gleichheit der *PM* schliessen und dann folgern dürfte, dass es lediglich secundäre, nicht im Wesen des Magnetismus begründete Ursachen sind, welche die im allgemeinen auftretende Differenz der *PM* bei langsamer und rascher Reduction der Kraft bedingen.

Meine Versuche vom Jahre 1882 (z. B. Tab. 20) zeigen dagegen, dass auch dann, wenn Inductionsströme in der Masse des Körpers sowie Alternationen in der Richtung des Extrastroms vermieden wurden, die rasche Reduction der grössten Kraft auf Null ein deutlich kleineres *PM* lieferte, als die langsame; aber während es sich ebenso auch bei den kleinsten Kräften verhielt, trat bei den Kräften mittlerer Grösse gerade das Umgekehrte ein.

Die richtige Erklärung für die letztere Erscheinung ergibt sich aus Versuchen, welche ich kürzlich<sup>1)</sup> (5. Abhandlung) veröffentlicht habe. Lässt man nämlich eine gewisse, nicht zu geringe Kraft so oft auf einen Körper wirken, bis das *PM* nicht mehr zunimmt, so ist — entgegen der bisherigen Anschauung — doch eine jede folgende kleinere Kraft, auch bei langsamer Reduction auf Null, im Stande dasselbe zu verändern: die der grössten nahe liegenden Kräfte erhöhen, die kleinsten vermindern das *PM*. Da nun die

1) C. Fromme, Wied. Ann. 43. p. 181. 1891.

früheren Versuche in der That so ausgeführt wurden, dass man zuerst den Körper einer gewissen grössten Kraft unterwarf, diese langsam auf Null reducirt, und dann eine kleinere Kraft zur Wirkung brachte, welche man rasch absinken liess, so ist erklärlich, weshalb die letztere das  $PM$  vermehrte, wenn sie der grössten nahe lag, und es verminderte, wenn sie in der Grösse viel von ihr differirte — ganz unabhängig von ihrer raschen Abnahme auf Null.

Der Mangel dieser Versuchsanordnung lag also darin, dass man den Erfolg des raschen Absinkens einer kleineren Kraft verglich mit dem des langsamen Absinkens der grössten, anstatt mit dem des langsamen Abfalls derselben kleineren.

Im Folgenden theile ich Versuche mit, welche die Frage in durchaus einwurfsfreier Weise lösen.

Die langsame Reduction der Kraft auf Null wurde bei denselben durch allmähliches Einschalten von Flüssigkeitswiderständen bewirkt — wie in der vorhergehenden Mittheilung schon des Näheren beschrieben wurde. Die Apparate waren die in der vorigen Abhandlung beschriebenen; ich bemerke daher nur noch einmal, dass die Magnetisirungsspirale auf ein Papprohr, die Compensationsspirale auf ein geschlossenes Messingrohr gewickelt war.

## § 2. Endgültige Lösung der Frage.

Man kann zunächst wieder den schon früher beschrifteten Weg, aber in correcter Weise, betreten:

Ein Bündel voneinander isolirter dünner Eisendrähte wird oft einer grossen Kraft unterworfen, die, langsam auf Null reducirt, das permanente Moment  $PM$  erzeugt. Darauf lässt man eine kleinere Kraft wirken, welche das  $PM$  um  $\pm \delta_1 \cdot PM$  ändert, wenn sie langsam auf Null abnimmt. Darauf kommt wieder die grösste Kraft zur Anwendung, welche  $PM$  herstellt, und dann die kleinere, die aber nun rasch auf Null reducirt wird und  $PM$  um  $\pm \delta_2 \cdot PM$  ändert. Führt man die rasche Abnahme der Kraft so aus, dass der Extrastrom der Oeffnung nur in der dem magnetisirenden Strom gleichen Richtung fliesst, und findet man dennoch  $\delta_1 \cdot PM$  und  $\delta_2 \cdot PM$  ungleich, so ist, da auch Inductionsströme in der Masse des Eisens ausgeschlossen sind, bewiesen, dass die

Geschwindigkeit der Entmagnetisirung in primärer Weise die Grösse des permanenten Moments beeinflusst.

Die rasche Reduction der Kraft auf Null wurde, wie schon bei den früheren Versuchen, so ausgeführt, dass man die in Quecksilbernäpfen mündenden Batteriedrähte durch einen kurzen, dicken Kupferbügel verband, ehe man die Batterie ausschaltete.

Tabelle 1. Bündel aus 70 isolirten Eisendrähten, jeder 20 cm lang und 0,03 cm dick.  $PM = 797^{\circ}$  (sc = Scalentheile) war durch eine electromotorische Kraft von 5 Bunsen (bei allen Versuchen angewandt) bei einem Rheostatenwiderstand von  $W = 0$  S.-E. erzeugt. Die Kräfte werden im Folgenden durch den im Siemens'schen Rheostaten eingeschalteten Widerstand bezeichnet; Flüssigkeitswiderstand befand sich in der Stromleitung nur während der langsamen Reduction einer Kraft auf Null.

Kraft ( $W$ )	$\delta . PM$		Differenz langsam — rasch
	bei langsamer Abnahme	bei rascher Abnahme	
0	0	-1,17	+1,17
1	+1,57	-0,40	+1,97
2	+2,80	+1,20	+1,60
3,5	+4,20	+2,90	+1,30
5	+5,55	+5,05	+0,50
10	+8,65	+7,80	+0,85
15	+9,05	+8,35	+0,70
20	+8,05	+7,60	+0,45
40	+4,15	+3,90	+0,25
60	$\pm 0$	-0,50	+0,50
80	-2,20	-2,90	+0,70
150	-4,00	-4,00	$\pm 0$
300	-2,70	-3,20	+0,50
600	-1,95	-1,80	-0,15
1200	-1,00	-1,00	$\pm 0$

Jedes  $\delta . PM$  ist das Mittel aus zwei Beobachtungen. Bei langsamer Abnahme der Kraft zeigen die  $\delta . PM$  den aus der 5. Abhandlung bekannten Gang, nach rascher Abnahme dagegen erhält man bei den grössten Kräften  $W = 0$  und  $W = 1$  negative  $\delta . PM$  und erst mit  $W = 2$  beginnt der normale Verlauf. Ueberall aber bleiben die positiven  $\delta . PM$  hinter den durch langsame Abnahme der Kraft erhaltenen zurück, während die negativen  $\delta . PM$  durchschnittlich stärker negativ sind.

Das Resultat ist also, dass bei grösserer Geschwindigkeit der Entmagnetisirung das permanente Moment kleiner ausfällt.

Tab. 2. In der gleichen Weise wurde ein anderes Bündel dünner Eisendrähte untersucht, dessen Drähte besonders sorgfältig durch Paraffin voneinander isolirt waren.  $PM = 802^{sc}$ .

Kraft ( $W$ )	$\delta . PM$		Differenz langs. — rasch.
	nach langsamer Abnahme	nach rascher Abnahme	
0	0	— 0,90	+0,90
0,5	+ 2,55	— 0,20	+2,75
1	+ 3,90	+ 0,30	+3,60
2	+ 4,00	+ 1,80	+2,20
3	+ 5,90	+ 3,45	+2,45
5	+ 7,90	+ 6,75	+1,15
10	+11,30	+10,30	+1,00
100	— 4,80	— 5,30	+0,50

Aus dieser Tabelle geht das gleiche Resultat hervor, der Einfluss der Entmagnetisirungsgeschwindigkeit ist grösser als bei dem vorhergehenden Drahtbündel.

Die Versuche wurden zum Theil wiederholt, nachdem um die das Drahtbündel enthaltende Glasröhre ein geschlossenes Messingrohr gelegt war.

Es wurden aber genau dieselben Werthe von  $\delta . PM$  erhalten, als Beweis, dass die in dem Messingrohr bei der raschen Stromabnahme inducirten Ströme im Vergleich mit dem Extrastrom in der Spirale keine merkliche Wirkung ausüben. Bei einem anderen Bündel waren die Drähte etwas krumm in eine Glasröhre gesteckt. Berührung der zuerst verkupferten, dann amalgamirten Drähte fand nur an wenigen Stellen statt, im allgemeinen waren die Abstände der Drähte voneinander gross.

Dies Drahtbündel liess einen Unterschied der  $\delta . PM$  kaum erkennen, es zeigte ihn aber auch dann nicht, als man die Zwischenräume zwischen den Drähten mit Quecksilber ausgefüllt und so das Entstehen von Inductionsströmen ermöglichte hatte. Ein Eisenstab zeigte dagegen enorme Unterschiede der  $\delta . PM$ , während ich bei einem Stahlstab zwar kleine, aber vollkommen deutliche Unterschiede beobachtete. Ich führe die Zahlen hier nicht an, weil sie möglicherweise



durch die Inductionsströme in der Masse der Stäbe beeinflusst sind.

Auf eine zweite Methode der Untersuchung wurde ich durch die folgende Ueberlegung geführt.

Es wird darauf ankommen, den magnetischen Zustand des Körpers bei der raschen Abnahme der Kraft auf Null möglichst wenig stabil gegenüber solchen Einflüssen zu wählen, welche die Molecularmagnete ihren neutralen Lagen zuzuführen streben. Die Wirkung einer raschen Abnahme der Kraft auf das permanente Moment kann man nun, wenn sie eine primäre ist, mit derjenigen einer Erschütterung vergleichen, und da diese mit der Grösse von  $PM$  wächst, so habe ich im Vorigen auch die rasch auf Null zu reducirende Kraft immer auf ein möglichst hohes  $PM$  wirken lassen. Eine besonders geringe Stabilität besitzt aber das inducirte magnetische Moment dann, wenn man die Kraft zuerst auf einen hohen Werth steigert und sie darauf ganz allmählich auf einen kleineren Werth vermindert. Denn wenn man in diesem Zustande den Körper erschüttert, so nimmt das inducirte Moment ab, statt wie sonst zuzunehmen.<sup>1)</sup> Es wurden daher die Versuche in folgender Weise angestellt. Eine gewisse grösste Kraft ( $W=0$  im Rheostaten) hatte oft auf das Drahtbündel der Tab. 1 gewirkt und, langsam durch Flüssigkeitseinschaltung auf Null reducirt, ein  $PM=809$  erzeugt. Dann stieg man wieder bis  $W=0$  auf, durch allmähliche Einschaltung von Widerstand im Siemens'schen Rheostaten bis zur Kraft  $W=x$  (im Rheostaten) herab und reducirt diese auf Null entweder durch allmähliche Einschaltung eines grossen Flüssigkeitswiderstandes oder durch Verbindung der Endigungen der Batteriedrähte mittelst des kurzen dicken Kupferbügels. In beiden Fällen nahm also die Kraft von demselben grössten Werthe ( $W=0$ ) an bis zur Null ab, in beiden Fällen erfolgte die Abnahme von  $W=0$  bis  $W=x$  langsam, dagegen war im ersten Fall die Abnahme von  $W=x$  bis  $W=\infty$  langsam, im zweiten rasch. Die Aenderung  $\delta.PM$  des nur durch Flüssigkeitseinschaltung erhaltenen  $PM=809$  gibt die folgende Tabelle.

1) C. Fromme, Wied. Ann. 4. p. 76. 1878; E. Warburg, Wied. Ann. 13. p. 141. 1881.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLIV.

Tabelle 3.

$W = x =$	100	140	150	160	170	180	190
$\delta \cdot PM_{\text{langsam}}$	0	+2,9	+2,4	+5,5	+2,4	+0,9	+1,4
$\delta \cdot PM_{\text{rasch}}$	-4,1	-5,4	-6,7	-0,4	-3,2	-5,0	-5,6
Differenz:							
Langs.-Rasch	+4,1	+8,3	+9,1	+5,9	+5,6	+5,9	+7,0

$W = x =$	200	220	250	300	500	1000	
$\delta \cdot PM_{\text{langsam}}$	-0,5	-0,6	-1,0	+1,3	0	-0,2	
$\delta \cdot PM_{\text{rasch}}$	-6,3	-6,7	-5,3	-6,1	-3,4	-3,0	
Differenz:							
Langs.-Rasch	+5,8	+6,1	+4,3	+7,4	+3,4	+2,8	

Während also das ausschliesslich durch Flüssigkeits-einschaltung gebildete  $PM$  durch langsame Abnahme der Kraft  $W=x$  überwiegend einen kleinen Zuwachs erfuhr, nahm es durch rasche Reduction der Kraft  $W=x$  nur und meist beträchtlich ab, stets war der Unterschied  $PM_{\text{langsam}} - PM_{\text{rasch}}$  positiv.

Auch diese Versuche beweisen somit den primären Einfluss der Entmagnetisirungsgeschwindigkeit; doch hatte ich bei ihnen noch folgendes Bedenken. Die Abnahme der Kraft von  $W=0$  bis  $W=x$  erfolgt wegen des Stöpselziehens im Siemens'schen Rheostaten nicht allmählich, sondern sprunghaft, und dass das nicht ohne Einfluss auf die Grösse von  $PM$  ist, zeigen gerade die von Null abweichenden Werthe von  $\delta \cdot PM_{\text{langsam}}$ . Denn diese müssten doch der Null gleich sein, wenn allmähliche (im Flüssigkeitsrheostaten) und sprunghaft (im Siemens'schen Rheostaten) Einschaltung von Widerstand einander äquivalent wären. Obwohl es nun nicht wahrscheinlich war, dass dies auf das Vorzeichen der Differenz  $PM_{\text{langsam}} - PM_{\text{rasch}}$  von Einfluss ist, weil ja der Widerstand  $W=x$  in beiden Fällen in der gleichen Weise eingeschaltet wurde, so habe ich doch den Versuch dahin abgeändert, dass ich den Siemens'schen Rheostaten ganz entfernte und auch  $W=x$  als Flüssigkeitswiderstand allmählich einschaltete. Eine Schwierigkeit liegt hier freilich in dem Auftreten von galvanischer Polarisation im Flüssigkeitsrheostaten. Auf  $PM_{\text{langsam}}$  ist dieselbe natürlich ohne Einfluss, wohl aber durchfließt, nachdem die Endigungen der Batteriedrähte durch den Kupferbügel verbunden sind, der

dem primären entgegengerichtete Polarisationsstrom die Spirale und vermindert das  $PM$ . Man kann sich in zweifacher Weise helfen: Entweder macht man den Flüssigkeitsrheostaten polarisationsfrei oder man richtet es so ein, dass der Polarisationsstrom nicht in die Magnetisirungsspirale gelangt. Der letztere Weg ist jedenfalls der einwurfsfreiere, denn auf gänzliche Abwesenheit von Polarisation kann man niemals mit Sicherheit rechnen. Ich habe den Flüssigkeitsrheostaten aus  $\text{CuSO}_4$ -Lösung zwischen grossen Cu-Electroden oder aus  $\text{ZnSO}_4$ -Lösung zwischen grossen Zn-Electroden gebildet und stets gefunden, dass, wenn man nach langsamer Einschaltung des Flüssigkeitswiderstands  $W = x$  die Nebenschliessung einsetzte,  $PM$  kleiner ausfiel, als wenn man den ganzen zur Verfügung stehenden Flüssigkeitswiderstand (circa 10000 Ohm) langsam in die Leitung schaltete. Je concentrirter die Lösungen waren, desto kleiner wurde — infolge geringerer Polarisation — die Abnahme; sie betrug aber auch bei concentrirten Lösungen noch bis zu 2 Proc. des  $PM$ .

Um die Wirkung einer doch etwa noch vorhandenen Polarisation ganz auszuschliessen, setzte ich deshalb die Nebenleitung so ein, dass der Flüssigkeitsrheostat in den Batteriezweig zu liegen kam, während sich in dem anderen Zweige nur die Magnetisirungs- und Compensationsspirale befanden. Jetzt erhielt ich u. a. folgende Resultate, gleichgültig, ob die  $\text{CuSO}_4$ -Lösung des Rheostaten verdünnt oder concentrirt war.

Tab. 4. Drahtbündel in Paraffin. Wenn der ganze Flüssigkeitsrheostat langsam eingeschaltet wurde, war  $PM = 800^\circ$ . Wurde dagegen nur eine gewisse Anzahl von Centimetern der Flüssigkeitssäule langsam eingeschaltet, und dann die Nebenschliessung eingesetzt, so war das  $PM$  kleiner:

bei 0	1	1,5	2	2,5	3,5	5	7	8	10	12 cm Flüssigk.
um 1,0	0,9	0,9	1,2	1,1	1,0	1,0	0,5	1,2	0	0,7 Scalentheile.

Auch hieraus folgt also ein Einfluss der Geschwindigkeit der Entmagnetisirung. Dass er erheblich kleiner ist, als sich aus den ersten Versuchen ergab, bei welchen sich der Flüssigkeitsrheostat im Zweige der Spiralen befand, braucht man aber nicht gänzlich mit der Ausschliessung des Polarisations-

stroms zu erklären. Es kann hieran auch die grössere Intensität des Oeffnungsextrastroms Schuld sein, welcher jetzt einen um  $W = x$  geringeren Widerstand durchlief. Um diese Vermuthung als richtig zu erweisen, schaltete ich in die Leitung einen Kohlrausch'schen Walzenrheostaten, welcher auf zehn Windungen etwa 15 S.-E. Widerstand enthielt. Ich schwächte den Strom zuerst durch allmähliche Einschaltung eines Theils dieses Rheostaten<sup>1)</sup> und fügte darauf die Nebenschliessung so ein, dass der Walzenrheostat sich im Zweige der Spiralen befand, der Extrastrom also auch den eingeschalteten Theil des Rheostaten durchlaufen musste. Bei allmählicher Reduction des Stroms auf Null war  $PM = 802^\circ$ .

Tabelle 5.

Zahl der eingeschalteten Windungen .	0	1	2	4	7	10
Abnahme des $PM$ in Scalentheilen .	1,1	1,1	1,3	2,1	2,1	1,3.

Die Abnahme des  $PM$  infolge raschen Sinkens der Kraft ist also trotz geringerer Intensität des Extrastromes klein geblieben. Es wird sich aber gleich zeigen, dass bei grösseren in die Extrastrombahn eingeschalteten Widerständen in der That die Depression bedeutender ausfällt.

Um das Bereich der einzuschaltenden Widerstände zu erweitern, habe ich schliesslich folgende Versuchsanordnung gewählt.

Ein Siemens'scher Rheostat und ein etwa 10000 Ohm enthaltender Flüssigkeitsrheostat wurden einander parallel in die Leitung geschaltet. Wenn der Strom geschlossen wurde, befanden sich die Electroden des Flüssigkeitsrheostaten in Berührung, und im Siemens'schen war ein gewisser Widerstand eingeschaltet. Nun schwächte ich den Strom dadurch, dass ich allmählich die ganze Flüssigkeitssäule einschaltete. Dann wurde der durch die Flüssigkeit gehende Stromantheil merklich Null, man konnte daher diesen Zweig ganz unterbrechen. Der noch die Spiralen und den Siemens'schen Rheostaten durchfliessende Strom wurde nun durch Anlegung der Nebenleitung an die Endigungen der Batteriedrähte rasch nahe auf Null gebracht.

1) Die Beweiskraft dieses Versuches hängt natürlich ganz von der Erfüllung der Bedingung ab, dass Contactröllchen und Draht stets in sehr guter Berührung sind.

Hier spielt also kein Polarisationsstrom mit; zudem wird die Intensität des Extrastroms dadurch geschwächt, dass er den im Siemens'schen Rheostaten von Anfang an liegenden Widerstand durchlaufen muss.

Tab. 6. Bei dem Paraffindrahtbündel wurde das durch nur langsame Einschaltung von Widerstand erzeugte  $PM = 808^{\circ}$  um folgende Beträge vermindert:

Widerstand im Siem. Rheost. }	5	10	20	50	100	200	500	1000 S.-E.
Abnahme d. $PM$	0,7	1,8	3,2	5,2	6,2	5,3	3,2	1,5 Scalenth.

Bei einem anderen Drahtbündel, dessen Drähte sich in einem grösseren Abstand voneinander befanden, betrug die Abnahme des  $PM = 809^{\circ}$ :

Widerstand im Siem. Rheost. }	5	10	20	50	100	200	350	500	1000 S.-E.
Abnahme d. $PM$	0	0,7	1,9	1,3	1,2	2,5	2,7	2,0	1,3 Scalenth.

Somit nimmt die Depression mit wachsendem Rheostatenwiderstand zuerst zu, dann wieder ab. Die Zunahme erklärt sich aus dem bei abnehmender Kraft anfangs immer stärkeren Zurückbleiben der Molecularmagnete in Verbindung mit der Zunahme des Schliessungswiderstandes; dass schliesslich wieder eine Abnahme, und zwar bis Null, erfolgen muss, ist selbstverständlich.

Setzte man die Nebenschliessung aber so ein, dass der Extrastrom den Rheostaten nicht durchlief, so erhielt man Depressionen von verschwindendem Betrage. Damit ist bewiesen, dass bei Drahtbündeln die Intensität des Extrastromes von erheblichem Einfluss auf die Grösse der Depression des permanenten Momentes ist.

Aus allen Versuchen, welche ich im Vorhergehenden beschrieben habe, geht hervor, dass auch dann, wenn sowohl die Entwicklung inducirter Ströme in der Masse des Eisens als auch ein Alterniren der Richtung des Extrastromes vermieden wird, nach rascher Reduction der Kraft auf Null ein deutlich kleineres  $PM$  auftritt, als nach langsamer Kraftabnahme. Man ist daher berechtigt, den Grund dafür in einer je nach der Geschwindigkeit der Kraftabnahme verschieden schnellen Rückdrehung der Molecularmagnete zu sehen. Je schneller die Abnahme der Kraft, desto grössere

Geschwindigkeit erlangen die Molecularmagnete, desto leichter folgen sie daher ihren gegenseitigen Kräften, und da diese stets auf Verminderung des magnetischen Momentes abzielen, so erklärt sich damit das kleinere *PM* nach rascher Abnahme der Kraft.

Nachdem die primäre Abhängigkeit der Erscheinung von der Geschwindigkeit der Entmagnetisirung dargethan ist, hat dieselbe wesentlich an Interesse gewonnen; ich gebe daher im Folgenden einige weitere Beiträge zu ihrer Kenntniss.

### § 3. Verschiedene Geschwindigkeiten der Kraftabnahme.

Wenn man einem Körper durch eine gegebene magnetisirende Kraft ein möglichst grosses permanentes Moment ertheilen will, so muss man die Kraft ganz allmählich auf Null reduciren. Das geschieht am besten durch langsame Einschaltung eines grossen Flüssigkeitswiderstandes. Dieses Verfahren führt auch allein zu constanten Resultaten, um einen wie beschaffenen Körper es sich auch handeln möge, es allein gestattet eine Vergleichbarkeit der permanenten Momente verschiedener Körper.

Ich will nun zuerst die Resultate schildern, zu denen man durch plötzliche Einschaltung von Widerstand gelangt, und zwar möge derselbe im Siemens'schen Rheostaten liegen. Zieht man in demselben einen Stöpsel, so bieten sich dem Extrastrom zwei Wege: den einen bildet die Funkenbahn — ein Funken lässt sich meist beobachten —, den anderen die eingeschaltete Widerstandsrolle.

Mit einem Drahtbündel wurden folgende Versuche angestellt.  $PM = 814^{ac}$ , wenn Flüssigkeitswiderstand langsam eingeschaltet war.

Tabelle 7.

a) Man schaltet im Siemens'schen Rheostaten allmählich, d. h. in der Reihenfolge 0,1, 0,2, 0,2, 0,5, 1, 1, 2, 5, 10 u. s. w., im Ganzen  $W = 200$ , resp. 300, 500, 1000 S.-E. ein, zieht dann aber den Stöpsel von  $W = 5000$ , fügt diesen Widerstand also plötzlich hinzu und reducirt den Strom gänzlich auf Null durch Hinzufügung von Flüssigkeitswider-

stand. Dann erscheint  $PM$  kleiner als  $814^{\text{se}}$  um 18,0, resp. 9,4, 5,4,  $0,7^{\text{se}}$ .

b) Man schaltet allmählich  $W = 200$  ein, sodann plötzlich durch Ziehen des betreffenden Stöpsels  $W = 1000$ , resp. 2000, 5000, und schliesslich den Flüssigkeitsrheostaten.  $PM$  war dann kleiner um 6,0, resp. 14,8,  $19,8^{\text{se}}$ . Unterbrach man aber nach allmählicher Einschaltung von  $W = 200$  den Strom an Quecksilber, so betrug die Abnahme des  $PM$   $30,1^{\text{se}}$ .

c) Es wurde zuerst plötzlich durch Ziehen des betreffenden Stöpsels eingeschaltet  $W = 5$ , resp. 10, 20, 50, 100, darauf die Flüssigkeit.  $PM$  zeigte dann seinen Maximalwerth. Wurde dagegen zuerst der Stöpsel von  $W = 200$ , resp. 500, 1000, 2000, 5000 gezogen, und danach der Flüssigkeitsrheostat eingeschaltet, so war  $PM$  kleiner um 4,5, resp. 20,3, 45,8, 85,2,  $119,0^{\text{se}}$ . Die nach der plötzlichen Einschaltung des Rheostatenwiderstandes noch verbliebenen inducirten Magnetismen waren

bei $W = 500$	1000	2000	5000
$TM = 81,0$	37,5	18,1	7,3.

Demnach war nach plötzlicher Einschaltung von  $W = 500$  (und noch mehr bei  $W = 200$ ) das ganze Moment noch um  $81,0 - 20,3 = 60,7$  grösser als das maximale  $PM$ . Trotzdem resultirte ein um 20,3 kleineres  $PM$ . Wurde der Strom sofort an Quecksilber unterbrochen, so fand sich  $PM$  kleiner nur um  $79,9^{\text{se}}$ , es war also weniger reducirt, als durch das plötzliche Ziehen des Stöpsels von  $W = 2000$  oder  $W = 5000$ . (Cf. § 4.)

Im allgemeinen erhält man also nicht den Maximalwerth des  $PM$ , wenn man den Strom durch Stöpselziehen im Siemens'schen Rheostaten schwächt. Noch stärker als bei einem Drahtbündel (oder Stahlstab) sind die Unterschiede bei einem weichen Eisenstab. Bei ersteren kann man den Maximalwerth vollständig erreichen durch allmähliches von kleinen zu grösseren Widerständen fortschreitendes Einschalten der ganzen 10000 S.-E. des Siemens'schen Rheostaten, bei dem Eisenstab erhält man auch so noch ein erheblich zu kleines  $PM$ . Ich beobachtete bei einem solchen von 17 cm Länge und 0,6 cm Dicke ein Minus von 16,8 Proc.,



bei einem anderen von 15 cm Länge und 0,6 cm Dicke ein Minus von 9,2 Proc. Ziehen des Stöpsels von  $W = 5000$  (und darauf folgendes Einschalten der Flüssigkeit) gab bei den beiden Stäben ein um 45,8 Proc. und 40,2 Proc. zu kleines  $PM$ , während die Unterbrechung des Stromes an Quecksilber 47,4 Proc. und 41,2 Proc., also etwa ebenso grosse Verluste erzeugte. (Vgl. dagegen den grossen Unterschied bei einem Drahtbündel. Tab. 7 c am Ende. Vgl. auch die Versuche in § 4.)

Bei einem Eisenstab war es sogar nicht gleichgültig, ob man die Stöpsel langsam oder rasch zog; rasches Ziehen gab ein um 2,0 Proc. kleineres  $PM$ .

Ich habe oben Nachdruck auf eine langsame Einschaltung des Flüssigkeitswiderstandes gelegt. Bei Drahtbündeln und Stahlstäben kann man von dieser Bedingung absehen, bei Eisenstäben ist sie wesentlich, will man das maximale  $PM$  erhalten. Durch langsame Einschaltung (in 25<sup>sec</sup>) eines  $\text{CuSO}_4$ -Rheostaten von ca. 10000 S.-E. erhielt der erstgenannte Eisenstab ein  $PM$  von 746<sup>sec</sup>. Führte ich dagegen die Electroden dieses Rheostaten schon in 2<sup>sec</sup> von der Berührung bis in ihren grössten Abstand, so war  $PM$  nur = 508, also um 32 Proc. kleiner. Der zweitgenannte Eisenstab gab auch hierbei wieder einen kleineren Verlust, nämlich von nur 20 Proc.

Es ist aber nicht einmal nothwendig, die ganze Flüssigkeitssäule rasch in den Stromkreis einzuschalten, um ein zu kleines  $PM$  zu bekommen. Es genügt vielmehr, die bewegliche Electrode nur anfangs rasch von der festen zu entfernen; führt man dann auch den Rest der Verschiebung sehr langsam aus, so erhält man dennoch ein merklich kleineres  $PM$ .

Tab. 8. Der zuerst genannte Eisenstab von 17 cm Länge und 0,6 cm Dicke.

Ruhelage des Magnetometers 185,0.

Bei  $W = 0$  im Flüssigkeitsrheostaten ging die Einstellung über die Scala hinaus, die Ablenkung war  $> 815^{\text{sc}}$ . Es wurde nun sehr langsam Flüssigkeitswiderstand eingeschaltet, und dabei diejenigen fünf Lagen der beweglichen Electrode bezeichnet, bei denen die Einstellung des Magnetometers auf

392, 344, 311, 303, 301 war. Nach Unterbrechung des Stromes war die Einstellung auf 297,5, sodass also das Maximal- $PM = 112,5$  war. Nun wurde wieder bei  $W = 0$  geschlossen und die Electrode sehr rasch bis zu der ersten Lage verschoben, worauf der Rest der Flüssigkeitssäule langsam eingeschaltet wurde. Den fünf bezeichneten Lagen entsprachen jetzt folgende Einstellungen:

355,0, 321,0, 291,5, 284,0, 281,7.

Endlich nach vollständiger Einschaltung der Flüssigkeitssäule und Unterbrechung des Stromes war die Einstellung 278,6, das  $PM$  also  $93,6^{sc}$  d. h. um  $18,9^{sc}$  kleiner als vorher. Die Unterschiede des ganzen Moments (permanentes + verschwindendes) in den fünf Lagen der Electrode sind demnach:

37,0, 23,0, 19,5, 19,0, 19,3.

Sie nehmen also ab, je mehr Flüssigkeit langsam eingeschaltet wird, und erreichen natürlicherweise schliesslich den Unterschied 18,9 der permanenten Momente.

Bei einem anderen Versuch wurden notirt die Einstellungen des Magnetometers:

423,0, 346,5, 314,5, 300,5, 294,5,

wenn die Flüssigkeit nur langsam eingeschaltet wurde. Die letzte Zahl ist gewonnen nach Einschaltung des ganzen Flüssigkeitsrheostaten und Unterbrechung des Stroms. Wurde dagegen die Electrode sehr rasch bis an die Stelle geführt, welcher vorher die Einstellung 423,0 entsprochen hatte, von da an aber langsam verschoben, so notirte man an denselben Punkten die Einstellungen:

407,0, 336,0, 305,0, 290,6, 285,2.

Das magnetische Moment war also jetzt kleiner um:

16,0, 10,5, 9,5, 9,9, 9,3.

Hieraus ergibt sich derselbe Schluss wie vorhin. Ich erwähne noch folgenden Versuch: Berührten sich die Electroden des Rheostaten, so betrug die Ablenkung des Magnetometers etwa  $1200^{sc}$ . Nun verschob ich die eine Electrode sehr rasch um soviel, dass die Ablenkung noch  $665^{sc}$  betrug. Die nun folgende Verschiebung wurde langsam ausgeführt. Es fand sich dann  $PM = 101,0^{sc}$ , während es bei nur langsamer Einschaltung der Flüssigkeit gleich 110,0 war. Trotz-

dem also nur etwa die Hälfte des inducirten Magnetismus rasch, die andere Hälfte aber sehr langsam zum Verschwinden gebracht wurde, so trat dennoch ein Verlust von 8—9 Proc. an permanentem Moment ein.

Diese Versuche beweisen ebenfalls, dass die Verschiedenheit der *PM* nach langsamer und rascher Abnahme der magnetisirenden Kraft nicht durch Inductionsströme hervorgerufen sein kann. Denn der Extrastrom läuft, da keinerlei Unterbrechung des Kreises stattfindet, nur in der Richtung des primären Stromes; es wären also höchstens noch die in der Masse des Eisenkerns inducirten Ströme als Ursache zu betrachten. Obwohl ich nun nicht einzusehen vermochte, inwiefern bei meiner Versuchsanordnung diese Ströme eine Abnahme des permanenten Moments herbeiführen konnten, so modificirte ich dennoch den Versuch in der zuletzt beschriebenen Weise. Die inducirten Ströme liefen dann ab, so lange der Stab noch ein temporäres Moment von zum Theil bedeutender Grösse besass, welches langsam entfernt wurde; aber trotzdem resultirte ein zu kleines *PM*. Die schliessliche langsame Stromabnahme ersetzte also den während der raschen Abnahme entstandenen Verlust an magnetischem Moment nicht ganz, wohl aber zum Theil wieder. (Vgl. die zwei Reihen von Unterschieden in Tab. 8.)

Tab. 9. Im Anschluss an diese Versuche gebe ich noch an, wie sich die Wirkung kleinerer Kräfte nach einer grossen bei diesem Eisenstab gestaltet, wenn dieselben rasch auf Null reducirt werden.<sup>1)</sup> War im Siemens'schen Rheostaten  $W = 0$ , und wurde langsam der Flüssigkeitsrheostat eingeschaltet, so erhielt man  $PM = 490^{\text{ec}}$ . Es wurde nun irgend ein Rheostatenwiderstand  $W = x$  S.-E. eingeführt, und dieser schwächere Strom auf Null reducirt entweder durch rasche Einschaltung des Flüssigkeitsrheostaten oder durch Verbindung der Batteriedrähte mit der kurzen Nebenschliessung.

Beim Gebrauch der Nebenschliessung tritt die charakteristische Wirkung kleinerer Kräfte gar nicht hervor, alle bringen, rasch auf Null reducirt, eine Abnahme des Maximal-*PM* hervor. Bei rascher Flüssigkeitseinschaltung da-

1) C. Fromme, Wied. Ann. 43. p. 181. 1891.

gegen zeigt sich das bekannte Gesetz, wonach die kleinsten Kräfte eine Abnahme, grössere eine Zunahme verursachen.

### Aenderung des Maximal-*PM*.

Stromabnahme durch:						
Rasche Flüssigkeitseinschalt.	- 82	- 70	- 25	- 14	± 0	+ 2
Nebenschliessung . . . .	-174	-174	-182	-172	-135	-96
$W =$	0	1,5	3	5	10	20

Stromabnahme durch:						
Rasche Flüssigkeitseinschalt.	+ 4	+ 2	- 1	- 2	- 2	- 1
Nebenschliessung . . . .	-78	-41	-29	- 9	- 2	- 2
$W =$	40	80	150	300	600	1200

Nur bei den grössten, von  $W = 10$  bis  $W = 0$ , wird die spezifische Wirkung kleinerer Kräfte überdeckt durch die Folgen der raschen Stromabnahme, es tritt da eine wachsende Abnahme von *PM* auf.

#### § 4. Zwei Arten der Stromunterbrechung.

Schon in der dritten Abhandlung habe ich untersucht, welchen Einfluss die Art der Stromunterbrechung auf die Grösse von *PM* ausübt. Ich habe damals gefunden, dass man bei der Unterbrechung von Kupfer an Kupfer ein nur wenig (2 bis 3 Proc.) kleineres *PM* erhält, als bei Unterbrechung von Kupfer an Quecksilber.

Es wurde jetzt in umfassenderer Weise die letztere Art der Unterbrechung mit derjenigen von Platin an Platin verglichen. Diese lieferte ausserordentlich viel regelmässiger Resultate. Geprüft wurden die beiden schon erwähnten Eisenstäbe, das Drahtbündel in Paraffin und zwei Stahlstäbe, und zwar in der Weise, dass der Strom mit dem Widerstande  $W = 0$  im Siemens'schen Rheostaten geschlossen und langsam auf Null reducirt, sodann mit  $W = x$  geschlossen und an Quecksilber oder an Platin unterbrochen wurde.

Tabelle 10.

1. Eisenstab: Länge = 17 cm, Dicke = 0,6 cm,  $PM_{\text{Max.}} = 558$ .
2. Eisenstab: " = 16 " " = 0,6 " " = 469.
1. Stahlstab: " = 15 " " = 0,175 cm, " = 792.
2. Stahlstab: " = 15 " " = 0,25 " " = 791.
- Drahtbündel: " = 799.

Abnahme des  $PM_{\text{Max}}$  durch Unterbrechung des  
Stromes an Hg oder Pt.

W	1. Eisenst.		2. Eisenstab		Drahtbündel		1. Stahlstab		2. Stahlstab	
	Hg	Pt	Hg	Pt	Hg	Pt	Hg	Pt	Hg	Pt
0	266	264	197	194	94,5	115,2	4,0	6,2	53,2	55,4
5	—	—	—	—	97,4	120,5	2,0	3,2	33,3	38,5
7	—	—	—	—	71,5	122,0	—	—	—	—
10	250	256	209	209	73,3	123,0	2,1	2,4	21,5	23,5
15	—	—	—	—	84,8	106,7	—	—	—	—
20	214	217	164	162,5	32,8	87,6	2,9	3,9	11,7	12,7
30	178	178	—	—	12,5	16,4	—	—	—	—
40	150	155	102,4	104	0	9,5	2,1	3,0	8,1	10,1
60	120	121	—	—	5,5	18,0	—	—	—	—
80	90	100	63,8	61,6	5,6	18,3	1,2	1,4	6,3	6,7
150	58	58	33,2	31,2	7,7	28,6	1,4	2,0	4,5	6,1
300	24	26	15,7	14,6	7,0	18,2	0,4	1,1	2,4	3,3
600	5	8	—	—	2,8	8,7	—	—	—	—

Bei den Eisenstäben zeigt sich also kein ausgesprochener Einfluss der Art der Unterbrechung auf die Abnahme von  $PM$ , bei dem Drahtbündel und den Stahlstäben aber bringt die Platinunterbrechung stets die grössere Abnahme hervor, während der allgemeine Verlauf der Abnahme bei veränderlichem Rheostatenwiderstand von der Art der Unterbrechung unabhängig zu sein scheint.

Berücksichtigt man nun, dass eine jede der kleineren Kräfte an und für sich schon, d. h. auch beim langsamen Absinken auf Null das Maximal- $PM$  im Sinne einer Zu- oder Abnahme geändert haben würde (cf. die vorige Abhandlung), und addirt man deshalb den Betrag derselben mit dem zugehörigen Vorzeichen zu den Zahlen der Tabelle, so erhält man Werthe, deren Verhältniss ich im Folgenden angebe. Das Verhältniss der wahren Abnahme durch Stromunterbrechung an Platin zu der an Quecksilber ist:

W =	0	5	7	10	15	20	30	40	60	80	150	300	600
1. Eisenst.	1,0	—	—	1,0	—	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,0	1,1	2,0
2. Eisenst.	1,0	—	—	1,0	—	1,0	—	1,0	—	1,0	0,9	0,9	—
Drahtb.	1,2	1,2	1,6	1,6	1,2	2,2	1,2	2,6	4,1	9,0	8,0	4,2	8,4
1. Stahlst.	1,5	1,4	—	1,2	—	1,6	—	2,1	—	1,7	1,9	—	—
2. Stahlst.	1,0	1,2	—	1,1	—	1,1	—	1,7	—	1,3	2,5	4,0	—

Besonders hohe Werthe erreicht also das Verhältniss bei dem Drahtbündel unter Wirkung der kleinsten Kräfte;

auch bei den Stahlstäben ist seine Abweichung von der Einheit sehr merklich, während es bei den Eisenstäben der Eins gleich gesetzt werden kann.

Ich habe nun mit demselben Drahtbündel noch eine ausführliche Versuchsreihe angestellt zur genaueren Prüfung der Frage, ob der allgemeine Verlauf der Abnahme mit der Stromstärke von der Unterbrechungsart unabhängig ist. Der aus dem Quecksilber heraus zu hebende Kupferdraht war bei diesen Versuchen besonders spitz zugefeilt.

Tabelle 11. Maximal- $PM = 801$ .

$W$	Abnahme des $PM_{\text{Max}}$ durch Unterbrechung an		Änderung d. $PM_{\text{Max}}$ bei Einschalt. von Flüssigkeit	Verhältn. der corr. Abnahmen Platin Quecksilber
	Quecksilber	Platin		
0	109,5	120,0	0	1,1
1,5	105,5	124,3	+ 2,0	1,2
3	109,5	122,1	+ 5,3	1,1
5	109,6	124,4	+ 7,8	1,1
7	104,9	123,5	+ 10,0	1,2
10	96,2	121,0	+ 11,8	1,2
13	96,3	121,0	+ 11,9	1,2
18	84,5	90,5	+ 12,0	1,1
22	52,0	74,6	+ 12,0	1,3
25	36,0	53,5	+ 11,9	1,4
30	15,0	18,5	+ 11,0	1,1
40	6,2	12,3	+ 5,6	1,5
50	7,5	8,1	+ 1,0	1,1
60	8,3	13,4	- 2,0	1,8
80	10,1	17,0	- 4,2	2,2
100	10,1	17,6	- 4,8	2,4
140	20,0	28,5	- 4,8	1,6
180	13,6	18,9	- 4,2	1,6
220	9,0	10,6	- 3,6	1,3
300	5,9	11,5	- 3,0	3,0
400	4,0	12,0	- 2,5	6,3
500	4,5	7,8	- 2,2	2,4
700	1,7	5,4	- 1,2	8,4
1000	1,5	5,7	- 1,2	15,0

In der That ist also der Verlauf der gleiche: Es bleibt die Depression des  $PM_{\text{Max}}$ , wie man auch den Strom unterbricht, mit abnehmender Stromstärke zuerst etwa constant, nimmt dann bis zu einem Minimum ab, wieder bis zu einem Maximum zu und endlich wieder ab. Das Minimum der Depression liegt etwa bei der gleichen Kraft ( $W = 50$ ), welche, wenn sie langsam auf Null reducirt wird, das bei  $W = 0$

erzeugte *PM* ungeändert lässt (neutrale Kraft in der Bezeichnung der vorbergehenden Abhandlung), und das folgende Maximum der Depression etwa bei derjenigen ( $W = 140$ ), welche das *PM* auch dann am meisten vermindert, wenn sie langsam auf Null abnimmt. Ob dies ein zufälliges Zusammentreffen ist, lasse ich hier unerörtert.

Bei der Unterbrechung des Stromes an Platinflächen wird der die Funkenbahn verfolgende Theil des Extrastromes kleiner sein, als bei der Unterbrechung zwischen Kupfer und Quecksilber. Infolge dessen kann man erwarten, dass die Depression des *PM* grösser ausfällt, wie das in der That auch das Drahtbündel und die Stahlstäbe zeigten. Bei den Eisenstäben hing dagegen die Depression nicht merklich von der Art der Unterbrechung ab. Es ist also hier gleichgültig, ob ein grösserer oder kleinerer Theil des Extrastromes in geschlossener Bahn verläuft. Dass in dieser Beziehung ein Unterschied zwischen Eisenstäben einerseits, Stahlstäben und Drahtbündeln andererseits besteht, bewiesen schon die ersten in der 3. Abhandlung<sup>1)</sup> veröffentlichten Versuche. Denn dort ergab sich, dass, wenn der ganze Extrastrom in geschlossener Leitung sich bewegte, die Depression des *PM* beim Drahtbündel und Stahlstab etwa Null wurde, beim Eisenstab aber zwar kleiner, aber immer noch beträchtlich war.

§ 5. Der Körper ist von einer Metallröhre oder Inductionspirale umgeben.

Den Einfluss geschlossener Metallröhren auf die Grösse von *PM* habe ich schon in der dritten und vierten Abhandlung beschrieben: Einschliessen des Körpers in eine solche bewirkte bei Drahtbündeln und Stahlstäben, dass *PM* bei rascher Abnahme der Kraft nahe den gleichen Werth annahm, wie bei langsamer, während bei Eisenstäben noch ein grosser Unterschied blieb.

Ich führe daher nur noch folgende Beobachtungen an. In § 3 wurde erwähnt, dass ein Eisenstab — im Gegensatz zu einem Drahtbündel oder Stahlstab — ein kleineres *PM* annimmt, wenn die 10000 S.-E. des Siemens'schen Rheo-

1) C. Fromme, Wied. Ann. 5. p. 345. 1878.



staten allmählich eingeschaltet werden, als wenn man denselben Widerstand allmählich als Flüssigkeitswiderstand einführt. Durch Umgeben des Eisenstabs mit einer geschlossenen Metallröhre wird nun der Unterschied der  $PM$  erheblich geringer. Es war z. B. das Maximal- $PM$ , d. h. das nach langsamer Einschaltung des Flüssigkeitsrheostaten resultierende  $PM = 485$ , während man durch allmähliche Einschaltung des Siemens'schen Rheostaten nur  $PM = 416$  erhielt. Dagegen wurde  $PM = 476$ , also nur wenig kleiner, als das Maximal- $PM$ , wenn der Eisenstab von zwei ineinander gesteckten geschlossenen Messingröhren, deren jede etwa die Länge des Stabs besass, umgeben war. Beim Ziehen eines Stöpsels im Siemens'schen Rheostaten nimmt die Stromstärke sprunghaft ab, der entstehende Extrastrom vermag aber bei einem Eisenstabe nicht, wie bei einem Stahlstabe oder einem Drahtbündel, die daraus hervorgehende sprunghafte Rückdrehung der Molecularmagnete aufzuheben und damit einen Verlust an permanentem Moment zu verhindern. Erst die beim Stöpselziehen, ausserdem noch in einem geschlossenen, den Eisenstab umgebenden Metallrohr inducirten Ströme üben im Verein mit den Extrastömen in der Leitung diese Wirkung nahezu aus.

Man kann sich nun die Frage vorlegen, von welchem Einfluss eine den Körper umgebende *offene, d. h. aufgeschlitzte* Metallröhre ist.

Diese Frage ist nicht ohne Interesse. Es wäre nämlich einmal denkbar, dass auch die ungeschlossenen Ströme, welche in der aufgeschlitzten Röhre bei Unterbrechung des magnetisirenden Stroms inducirt werden, der Abnahme des  $PM$  entgegenwirken. Es wäre aber auch möglich, dass infolge einer in der Röhre inducirten alternirenden Electricitätsbewegung die Abnahme des  $PM$  noch grösser ausfiele, wie ohne Gegenwart der Röhre.

Tab. 12. a) Drahtbündel in Paraffin,

b) Stahlstab, 15 cm lang und 0,6 cm dick,

c) Eisenstab, 17 cm lang und 0,6 cm dick.

Das Drahtbündel kann mit einer Messingröhre von 15 cm Länge, 1,5 cm lichter Weite und 0,1 cm Dicke, Stahl-

stab und Eisenstab von einer ebensolchen, jedoch nur 0,75 cm weiten Röhre umgeben werden. Von einer jeden der beiden Röhren standen zwei Stück zur Verfügung, deren eines geschlossen, deren anderes der Länge nach aufgeschlitzt war. Der 0,05 cm breite Schlitz wurde bei einigen Versuchen auf eine Länge von 0,7 cm durch ein Kupferdrähtchen verschlossen. Die folgende Zusammenstellung enthält die durch Stromunterbrechung bei  $W = 0$  erfolgende Abnahme des durch langsame Stromschwächung erzeugten  $PM_{W=0}$ . Es sind die Mittel aus mehreren gut übereinstimmenden Werthen.

	$PM_{W=0}$	Abnahme des $PM_{W=0}$			
		Ohne Röhre	Mit aufgeschlitzter Röhre	Mit Kupferdrähtchen im Schlitz	Mit geschloss. Röhre
Drahtbündel	930	132,5	65,7	21,3	1,5
Stahlstab	756	121,8	110,9	73,0	1,4
Eisenstab	550	255,7	256,5	245,0	186,6

Tab. 13. Drahtbündel in Paraffin, umgeben von einer Messingröhre von 0,025 cm Dicke oder von einer Kupferröhre von nur 0,005 cm Dicke. Die Länge der Röhren ist der des Drahtbündels gleich, die Schlitzbreite gut 0,1 cm.

Abnahme des  $PM_{W=0}$  durch Stromunterbrechung bei  $W = 0$  (Mittelwerthe):

Ohne Röhre	Mit der Messingröhre	Mit der Kupferröhre
131,1	103,5	111,7

Die Kupferröhre wurde zu einem Stäbchen zusammengerollt und neben das Drahtbündel in die Magnetisirungspirale gelegt. Die Abnahme betrug sodann (im Mittel):

Ohne Stäbchen	Mit Stäbchen
133,9	133,3

Endlich wurde von der Kupferröhre soviel abgeschnitten, dass der Schlitz eine Breite von 2 cm erhielt. Die Röhre bedeckte so das Bündel nur etwa zur Hälfte. Die Abnahme des  $PM$  wurde dann gefunden:

Ohne Röhre	Mit Röhre
131,2	126,4

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich unmittelbar:

1) Ist der Körper von einer geschlossenen metallischen Röhre umgeben, so wird die Abnahme des  $PM$  durch Strom-

unterbrechung bei dem Drahtbündel und dem Stahlstab sehr klein, bleibt dagegen bei dem Eisenstab von beträchtlicher Grösse.

2) Umgeben mit einer der Länge nach aufgeschlitzten Röhre bewirkt ebenfalls, dass die Abnahme des *PM* kleiner ausfällt, bei dem Drahtbündel um 50 Proc., bei dem Stahlstab um 9 Proc. Nur bei dem Eisenstab ist die Wirkung der aufgeschlitzten Röhre Null.

3) Wird der Schlitz auf 0,7 cm Länge durch ein Kupferdrähtchen geschlossen, verläuft also etwa der 20. Theil der inducirten Ströme in geschlossener Bahn, so fällt die Abnahme des *PM* nochmals geringer aus; bei dem Drahtbündel verschwinden weitere 33 Proc., bei dem Stahlstab weitere 31 Proc. und auch bei dem Eisenstab beobachtet man jetzt eine um 4 Proc. kleinere Abnahme.

4) Mit abnehmender Dicke des aufgeschlitzten Metallrohres wird auch seine Wirkung auf *PM* kleiner. Doch ist ein Kupferrohr noch bei der Dicke von 0,005 cm im Stande, 15 Proc. von der Abnahme des *PM* aufzuheben.

5) Die Kupferröhre, zu einem Stäbchen zusammengerollt und neben das Drahtbündel gelegt, übte dagegen keinen Einfluss aus.

6) Dagegen hob sie, wenn um das Drahtbündel gelegt, selbst bei einer Schlitzbreite von 2 cm noch etwa 4 Proc. von der Abnahme des *PM* auf.

Die oben gestellte Frage ist also dahin beantwortet, dass auch die ungeschlossenen, in einem aufgeschlitzten Metallrohr bei Stromunterbrechung inducirten Ströme magnetisirend wirken, indem sie das rasche Verschwinden des temporären Momentes mässigen und damit die Abnahme des permanenten Momentes verringern. Diese ungeschlossenen Ströme sind ebenso wie die geschlossenen viel wirksamer bei Drahtbündeln und Stahlstäben als bei Eisenstäben, wo ihre Wirkung Null ist.

Es liess sich nun vermuthen, dass die in einer ungeschlossenen Inductionsspirale inducirten Ströme sich ebenso verhalten würden. Ich wickelte auf ein Glasrohr von 15 cm Länge etwa 200 Windungen umsponnenen Kupferdrahtes von 0,04 cm Dicke und schob dasselbe über das Drahtbündel in

Paraffin. Waren die Enden der Spirale metallisch verbunden, so nahm bei Stromunterbrechung *PM* nur verschwindend wenig ab. Die geschlossene Spirale übte also die gleiche Wirkung aus, wie die geschlossene Röhre. Isolirte ich dagegen die Spiralenenden in kleiner Entfernung voneinander, so wurde *PM* durch Stromunterbrechung noch um ebensoviel geschwächt, wie bei Abwesenheit der Spirale.

Eine geöffnete Spirale verhält sich also ganz anders, als eine aufgeschlitzte Röhre.

#### § 6. Zusammenstellung der Hauptresultate.

1) Je schneller eine magnetisierende Kraft auf Null absinkt, desto kleiner fällt das permanente Moment aus, und zwar auch dann, wenn sowohl Inductionsströme in der Masse des Körpers, als auch ein alternirender Verlauf des Extrastromes vermieden werden.

2) Da also die Erscheinung nicht ausschliesslich secundären Ursachen zugeschrieben werden kann, so ist es gestattet, ihre Erklärung in dem Mechanismus der Magnetisirung selbst zu suchen, und diese Erklärung ergibt sich ganz ungezwungen, wenn man sich auf den Boden der Hypothese von drehbaren Molecularmagneten stellt. Somit erhöht auch die Erscheinung die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese.

3) Ein zu kleines permanentes Moment erhält man auch dann, wenn nur der erste Theil der Kraftabnahme rasch, und der letzte wieder sehr langsam erfolgt.<sup>1)</sup>

4) Die Art der Unterbrechung des Stromes — ob zwischen Platinflächen oder zwischen Kupfer und Quecksilber — übt keinen Einfluss aus auf die Abhängigkeit, in welcher die Abnahme des permanenten Momentes durch Stromunterbrechung von der Intensität des Stromes steht. Auch die Grösse der Abnahme ist von der Art der Unterbrechung unabhängig bei Eisenstäben, während dagegen das permanente Moment von Stahlstäben und namentlich von Drahtbündeln bei Platinunterbrechung erheblich geringer ausfällt.

1) Folgerungen aus dieser Thatsache sollen erst in einer späteren Mittheilung gezogen werden.

5) Ist der Körper von einem geschlossenen Metallrohr oder einer geschlossenen Inductionsspirale umgeben, so wird der Unterschied der permanenten Momente nach langsamer Abnahme der magnetisirenden Kraft und nach rascher (Stromunterbrechung) kleiner, bei Drahtbündeln und Stahlstäben verschwindet er fast vollständig, bei Eisenstäben bleibt er noch von erheblicher Grösse. Aufgeschlitzte Metallröhren wirken bei jeder Breite des Schlitzes im gleichen Sinne, wie geschlossene, merklich und zum Theil sehr erheblich aber nur bei Stahlstäben und Drahtbündeln, gar nicht bei Eisenstäben. Eine geöffnete Inductionsspirale ist dagegen vollkommen wirkungslos.

Giessen, Math.-Phys. Cab. Juni 1891.

**X. Bemerkungen zu einem Versuch des Herrn  
von Bezold über die dielectricische Polarisation;  
von Th. Lohnstein.<sup>1)</sup>**

Hr. v. Bezold<sup>2)</sup> hat einen Versuch beschrieben, durch welchen die — nach dem Tangentengesetz erfolgende — Brechung der electricischen Kraftlinien an der Grenze zweier Dielectrica (Paraffin und Luft) — nachgewiesen werden sollte. Die Anordnung, deren sich Hr. v. Bezold bediente, sollte annähernd den Fall verwirklichen, dass sich eine electricisirte leitende Kugel im Inneren des einen Dielectricum, einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte, befindet. Die Vorstellung, von der er ausging, war die, dass in diesem Falle die Kraftlinien Gerade seien, die im ersten Dielectricum, welches die Kugel enthält, von deren Mittelpunkt ausgehen, im zweiten ein Strahlenbüschel darstellen, dessen einzelne Strahlen aus dem ersten durch das Brechungsgesetz erhalten werden und dessen Mittelpunkt um die Strecke  $K/K' \cdot d/2$  hinter der brechenden Ebene liegt, wo  $d$  die Dicke der Platte,  $K$ ,  $K'$  die Dielectricitätsconstanten der beiden Medien sind. Es ist aber leicht einzusehen, dass diese Anschauung ungenau ist. Wäre sie nämlich richtig, so müsste man im Inneren der Platte durch den Potentialausdruck  $A_1/r_1$ , im anderen Dielectricum auf der der brechenden Ebene anliegenden Seite durch  $A_2/r_2$  ( $A_1$ ,  $A_2$  Constante,  $r_1$ ,  $r_2$  die Entfernungen von jenen beiden Centren der Strahlenbüschel) den Bedingungen des Problems genügen können, was nicht möglich ist. Die Kraftlinien sind viel-

1) Die Anregung, mich mit diesem Thema zu beschäftigen, verdanke ich Hrn. Prof. Planck gelegentlich der von ihm im Anschluss an seine Vorlesungen im Wintersemester 1889/90 abgehaltenen Uebungen. Ich veröffentliche die damals erlangten Resultate nebst einigen Zusätzen jetzt, um vielleicht dadurch eine nochmalige experimentelle Behandlung des Gegenstandes zu veranlassen.

2) v. Bezold, Sitzungsber. der math. phys. Cl. d. k. bayer. Acad. d. Wiss. 1889. Wied. Ann. 21. p. 401. 1884.

mehr der Theorie zufolge in beiden Dielectricis krumme Linien. Es ist dies schon in dem einfachen Falle so, wo das Dielectricum, in dem sich die electricisirte Kugel befindet, einen nur auf einer Seite von einer Ebene begrenzten Halbraum darstellt. Dieser Fall lässt sich mit Hülfe ganz ähnlicher Entwicklungen, wie sie bei der Bestimmung der Electricitätsvertheilung auf zwei sich gegenseitig influenzirenden Kugeln anzustellen sind, z. B. durch Benutzung der Transformation durch reciproke radii vectores, vollständig erledigen. Specialisirt man das Resultat dieser Rechnungen für den Fall, in welchem die leitende Kugel in einen Punkt übergeht, so erhält man für die Potentiale  $\varphi_K$  und  $\varphi_{K'}$  in den beiden Medien folgende, nachträglich leicht zu verificirende Ausdrücke<sup>1)</sup>:

$$\varphi_K = \frac{E}{2K} \left( \frac{K + K'}{r} + \frac{K - K'}{r'} \right)$$

$$\varphi_{K'} = \frac{E}{r},$$

wo  $E$  die in dem Punkte concentrirte Electricitätsmenge,  $r$  und  $r'$  die Entfernungen des Punktes, auf den  $\varphi$  sich bezieht, von dem electricischen Punkte und seinem Spiegelbild in Bezug auf die brechende Ebene bedeuten. In diesem Fall sind also im zweiten Medium allerdings die Kraftlinien Gerade, deren Convergenzpunkt aber der Punkt  $E$  ist. (Der Einfachheit halber soll der Punkt durch die in ihm enthaltene Electricitätsmenge bezeichnet werden.) — Den von Hrn. v. Bezold experimentell geprüften Fall können wir annähernd ersetzen dadurch, dass wir uns in einer unendlich ausgedehnten electricischen Platte einen electricischen Punkt denken. Auch dies Problem lässt noch eine relativ einfache, allerdings nicht mehr durch einen endlichen Ausdruck darstellbare Lösung zu; beschränken wir uns auf den der Anordnung des Hrn. v. Bezold entsprechenden Fall, dass jener Punkt von beiden Grenzebenen gleich weit ent-

1) Nachträglich fand ich obiges Resultat schon in Mascart's *Electricité statique*; man kann übrigens, von ihm ausgehend, das erstere Problem, ähnlich wie Kirchhoff das Poisson'sche Zweikugelproblem, behandeln.



fernt ist, so kann man das Resultat in besonders übersichtlicher Weise aussprechen. Auf der Plattennormale, welche den electricischen Punkt enthält, nehme man in Abständen, die untereinander und der Dicke der Platte gleich sind, eine unendliche Menge von Punkten an, deren einer  $E$  selbst ist; man erhält dann das Potential im Inneren der Platte, wenn man sich in  $E$  die Electricitätsmenge  $E \cdot (K'/K)$ , in dem  $n$ ten Punkte auf der einen und der anderen Seite der Platte die Electricitätsmenge:

$$E \frac{K'}{K} \left( \frac{K-K'}{K+K'} \right)^n$$

concentrirt denkt; dagegen das Potential in einem der beiden Aussenräume, wenn man in den Punkt  $E$  die Electricitätsmenge:

$$E \frac{2K'}{K+K'},$$

in den  $n$ ten Punkt des anderen Aussenraumes die Electricitätsmenge:

$$E \frac{2K'}{K+K'} \left( \frac{K-K'}{K+K'} \right)$$

legt. Setzt man  $\mu = (K-K')/(K+K')$ , so findet man, dass die Tangenten der Kraftlinien, welche durch einen der brechenden Ebene und jener Normalen unendlich benachbarten Punkt gehen, letztere in einem Punkte schneiden, dessen Entfernung hinter der brechenden Ebene:

$$= \frac{d}{2} \frac{1 + \frac{\mu}{3} + \frac{\mu^2}{5} + \dots}{1 + \frac{\mu}{3} + \frac{\mu^2}{5} + \dots}$$

ist. Dieser Schnittpunkt liegt also in allen Fällen äusserst nahe dem Punkte  $E$ . — Dagegen schneidet die Tangente einer Kraftlinie, in einem unendlich fernen Punkte gezogen, die Normale in einem Punkte, der um die Strecke:

$$\frac{d}{2} \frac{1 + 3\mu + 5\mu^2 + \dots}{1 + \mu + \mu^2 + \dots} = \frac{d}{2} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} = \frac{d}{2} \frac{K}{K'}$$

hinter der brechenden Ebene liegt. Man kann dieses Resultat geometrisch deuten, indem der Punkt, von dem für unendlich ferne Punkte die Wirkung hiernach ausgeht, der Schwerpunkt der Massenpunkte ist, durch deren Potential in diesem Falle das electricische Potential dargestellt wird. —

Ferner kann man beweisen, dass der entsprechende Schnittpunkt für endliche Punkte zwischen jenen beiden liegt. — Wahrscheinlich hat Hr. v. Bezold die Wirkung in solchen Punkten untersucht, für welche die für unendlich entfernte geltende Formel nahezu angewandt werden könnte; wie wir eben gesehen haben, ist für diese das Resultat der strengen Theorie identisch mit dem aus v. Bezold's Vorstellung folgenden. — In jedem Falle wäre es wünschenswerth, mit Rücksicht auf die vorstehenden Erörterungen den lehrreichen Versuch des Hrn. v. Bezold zu wiederholen.

Berlin, Juni 1891.

**XI. Einige Berichtigungen zu den von mir  
mitgetheilten Werthen der Elasticitätsconstanten  
verschiedener Krystalle und dichter Mineralien;  
von W. Voigt.**

Die von mir in einer Reihe von Abhandlungen in diesen Annalen publicirten Werthe der Elasticitätsconstanten von Krystallen sind aus den direct beobachteten Grössen theilweise durch längere Rechnungen bestimmt, und es war daher die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass einige der mitgetheilten Zahlen durch Rechenfehler entstellt wären.

Um so erfreulicher war es mir daher, dass Hr. Dr. Sella in Rom bei Gelegenheit der Berichterstattung über die Resultate meiner Untersuchungen diese Rechnungen im wesentlichen wiederholt hat. Hierbei haben sich wirkliche Fehler in den von mir angegebenen Elasticitätsmoduln  $s_{hk}$  und Elasticitätsconstanten  $c_{hk}$  nicht gefunden. Allerdings findet Hr. Dr. Sella in den letzten Stellen der  $c_{hk}$  mitunter kleine Abweichungen, aber diese erklären sich, da diese Grössen an sich viel ungenauer durch die Beobachtungen bestimmt werden, als die  $s_{hk}$ , vollständig durch die Wirkung der längeren logarithmischen Zwischenrechnungen. Dabei mögen einige der von Hrn. Dr. Sella erhaltenen Werthe um eine Kleinigkeit genauer sein, als die von mir gegebenen, da ich mit den sehr bequemen, aber bezüglich der Interpolation nicht ganz streng richtigen vierstelligen Logarithmentafeln zu rechnen pflege, welche Hr. Quincke herausgegeben hat.<sup>1)</sup> Jedenfalls halte ich nach der Sella'schen Controle die mitgetheilten Constantenwerthe als innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler für richtig erwiesen.

Ein wirkliches Versehen ist durch diese Controle aufgedeckt worden. Dasselbe ist in der vorletzten Formel auf Seite 659 des 35. Bandes enthalten, welche den allgemeinen

1) Verlag von G. Köster in Heidelberg, 1879.

Drillungscoefficienten eines Kreiscylinders von Sylvain angibt; hier ist bei dem zweiten Coefficienten 192,8 der Factor 2 vergessen, sodass der Werth 385,6 heissen muss. Dieser Fehler ist aber ohne alle Folge geblieben, denn die Formel ist nicht wieder benutzt. Bezüglich dieser, wie ähnlicher Formeln, welche im wesentlichen bestimmt sind, den Verlauf eines der elastischen Coefficienten, etwa durch Construction einer Curve, zu veranschaulichen, bemerke ich, dass ich sie der Regel nach mit abgerundeten Zahlwerthen berechnet habe; ihre Constanten besitzen also im allgemeinen eine geringere Genauigkeit, als die  $s_{hk}$  selbst.

Endlich erwähne ich noch, dass Hr. Dr. Sella für die wahrscheinlichen Fehler einiger der Elasticitätsmoduln  $s_{hk}$  etwas andere Werthe erhalten hat, als ich; da diese Zahlen aber nur geringe Bedeutung besitzen, so will ich die bezüglichen Correcturen nicht mittheilen.

Während somit für diese Untersuchungen regelmässiger Krystalle die Prüfung ein befriedigendes Resultat ergeben hat, sind leider in den von mir für einige Mineralien mitgetheilten Zahlen<sup>1)</sup> zwei hässliche Fehler stehen geblieben, die mir um so unbegreiflicher sind, als die Berechnungen, die zu jenen führen, die denkbar einfachsten sind. Ich bemerkte dieselben vor kurzer Zeit und habe durch eine freundliche Mittheilung von Hrn. Peerenboom in Aachen den Beweis erhalten, dass sie auch anderwärts aufgefallen sind. Sie betreffen die eine der beiden Elasticitätsconstanten,  $b$ , für Feuerstein und Opal, während die andere, aus denselben Zahlen berechnete,  $a$ , in beiden Fällen richtig ist.

Es muss nämlich stehen für Feuerstein:

$$b = 660\,000 \text{ an Stelle von } b = 523\,000,$$

für Opal:

$$b = 251\,000 \text{ an Stelle von } b = 272\,000.$$

Demgemäss tritt für das Verhältniss  $a/b$  für Feuerstein 11,7 an Stelle von 14,7, für Opal 15,6 an Stelle von 14,4. Diese Werthe schliessen den theoretischen 13,7 für quasi-isotropen Quarz ziemlich genau in die Mitte zwischen sich, weichen

1) P. Drude u. W. Voigt, Wied. Ann. 42. p. 537. 1891.

aber von diesem und voneinander viel mehr ab, als die früher gegebenen.

Dass trotzdem ihre Beweiskraft keine erheblich geringere ist, erkennt man, wenn man in Betracht zieht, dass das Verhältniss  $a/b$  der Elasticitätsconstanten sich ungleich ungenauer bestimmt, als das Verhältniss  $E/T$  des Dehnungswiderstandes zum Drillungswiderstande. Hierfür sind die früher angegebenen Werthe richtig, und zwar ist für Feuerstein  $E/T = 2,158$ , für Opal  $E/T = 2,120$ , für quasi-isotropen Quarz  $E/T = 2,136$ . Die Uebereinstimmung ist also im Hinblick darauf, dass Feuerstein nicht chemisch reine Kieselsäure ist und dass von dem Opal nur sehr kleine Stäbchen zur Beobachtung benutzt werden konnten, gewiss noch als sehr befriedigend zu bezeichnen.

Bemerkung. Ich benutze die Gelegenheit, um darauf hinzuweisen, dass in meiner Arbeit „Zur Theorie des Lichtes“, Bd. 43, p. 411, Z. 12 v. o. fälschlich „festen“ steht, statt „festen incompressibeln“; Hr. P. Volkmann in Königsberg hat mich hierauf freundlichst aufmerksam gemacht.

Göttingen, Juni 1891.

## XII. *Ausdehnung des Wassers;* *von W. Marek.*

Mit Rücksicht auf die besondere Wichtigkeit, welche der sehr genauen Kenntniss der Ausdehnung des Wassers für die Arbeiten der k. k. Normal-Aichungscommission in Wien zukommt, wurden die früheren Bestimmungen des Verfassers<sup>1)</sup> von der obengenannten Behörde wieder aufgenommen und mit Zuhülfenahme eines fehlerfreien Bergkrystallkilogrammes unter Berücksichtigung aller seither gemachten Erfahrungen einem gedeihlichen Abschluss entgegengeführt und scharf reducirt.

Die Beobachtungen (1889—1890) besorgte Hr. k. k. Aichmeister F. Maly, die Rechnungen mit ihm gemeinsam Hr. k. k. Aichmeister L. Petersburg.

Mit Zustimmung der Direction wird anschliessend das Schlussresultat mitgetheilt; die Mittheilung der Details wird seinerzeit Gegenstand einer besonderen Veröffentlichung werden, woselbst auch die Vergleichung des umstehenden Ergebnisses mit den Resultaten anderer Autoren Platz finden soll.

Die Temperaturscala der vorliegenden Tafeln ist die internationale Wasserstoffthermometerscala.<sup>2)</sup> Die Ausdehnung des Bergkrystalls in dieser Temperaturscala ist nach der trefflichen Untersuchung Dr. Benoit's<sup>3)</sup> angenommen zu  
 $t(7161,4 + 8,01 t) \times 10^{-9}$  parallel zur Axe  
und  $t(13254,6 + 11,63 t) \times 10^{-9}$  senkrecht zur Axe.

Die Relation anderer Temperaturscalen zu der genannten findet man u. a. in einer früheren Notiz des Verfassers<sup>4)</sup>.

Die Compressibilität des Wassers ist bei allen genauen Arbeiten zu berücksichtigen.<sup>5)</sup>

1) W. Marek, Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures. 3. partie D. 1884.

2) Conférence générale des Poids et Mesures 1889. Rapport sur la Construction des nouveaux prototypes métriques etc. Paris 1889. p. 122 et suiv.

3) Benoit, Travaux et Mémoires du Bureau int. des poids et mesures. 6. p. 190. 1888.

4) W. Marek, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. 10. p. 283. 1890.

5) Vgl. Carl's Rep. 16. p. 593. 1880.

Dichte  $D_t$  des lufthaltigen Wassers bei  $t^{\circ}\text{C}$ . unter dem Drucke von 760 mm Quecksilbersäule bezogen auf luftfreies Wasser im Max. seiner Dichte unter dem vorgenannten Drucke.

$t^{\circ}\text{C}$ .	Zehntelgrade									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0	0,999	8742	8678	8613	8547	8478	8408	8336	8263	8188
+0		8742	8804	8864	8922	8979	9035	9088	9140	9191
1		9287	9332	9376	9419	9460	9499	9536	9572	9607
2		9671	9701	9729	9755	9780	9803	9825	9846	9864
3		9897	9911	9923	9934	9944	9952	9958	9963	9968
4		9968	9966	9964	9959	9953	9946	9937	9927	9915
5		9886	9870	9852	9833	9812	9790	9766	9740	9714
6		9656	9624	9592	9558	9522	9485	9446	9407	9365
7		9278	9232	9185	9137	9087	9035	8982	8928	8873
8		8758	8697	8636	8573	8509	8443	8376	8308	8238
9		8095	8021	7946	7869	7791	7712	7631	7549	7466
10		7295	7208	7119	7029	6937	6844	6750	6654	6558
11		6360	6259	6157	6053	5949	5842	5735	5626	5516
12		5292	5178	5063	4947	4829	4710	4590	4468	4345
13		4096	3969	3841	3712	3581	3450	3317	3182	3047
14		2772	2633	2493	2351	2208	2064	1919	1772	1624
15	0,999	1325	1174	1021	0867	0712	0556	0399	0240	0080
16	0,998	9757	9594	9429	9264	9097	8929	8760	8589	8418
17		8071	7896	7720	7543	7365	7185	7004	6823	6640
18		6270	6084	5897	5708	5518	5328	5136	4943	4749
19		4357	4160	3961	3762	3561	3359	3157	2953	2748
20		2335	4126	1917	1707	1496	1283	1070	0855	0640
21	0,998	0205	9987	9767	9546	9325	9102	8878	8653	8427
22	0,997	7972	7744	7514	7283	7051	6818	6584	6349	6114
23		5639	5400	5160	4920	4678	4435	4191	3947	3701
24		3207	2959	2709	2459	2208	1956	1702	1448	1193
25	0,997	0681	0423	0164	9904	9644	9382	9120	8857	8592
26	0,996	8061	7794	7527	7258	6988	6718	6447	6175	5901
27		5353	5077	4801	4523	4245	3966	3686	3405	3124
28	0,996	2558	2274	1989	1703	1416	1129	0840	0551	0261
29	0,995	9679	9387	9094	8800	8505	8209	7913	7616	7318
30		6720	6419	6118	5816	5514	5210	4906	4601	4296
31	0,995	3682	3374	3066	2756	2446	2135	1823	1511	1198

Unterschied der Dichte  $D_t$  des lufthaltigen und der Dichte  $D_f$  des luftfreien Wassers.

$t^{\circ}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^7 (D_r' - D_r)$	-25	27	29	31	32	33	33	34	34	33	32
$t^{\circ}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20-32	
$10^7 (D_r' - D_r)$	-31	29	27	25	22	19	16	12	8	4 unmerklich	



### XIII. Ueber eine Consequenz der Poisson-Mossotti'schen Theorie; von Gottlieb Adler.

(Aus den Sitzungsber. d. kais. Acad. d. Wiss. in Wien. Math.-naturw. Cl.; Bd. 99. Abth. IIa. Dec. 1890; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Poisson's Theorie der magnetischen Induction ergibt die Magnetisirungszahl  $k$  als in sehr einfacher Weise abhängig von dem Verhältnisse  $g$  des von den Molecülen magnetischer Substanz wirklich eingenommenen Raumes  $e$  zum Gesamtvolumen  $v$ .

Es ist nämlich<sup>1)</sup>:

$$(1) \quad k = \frac{3g}{4\pi(1-g)},$$

$$\text{wo (I) } g = \frac{e}{v} \text{ ist.}$$

Dieselbe Gleichung (1) gilt, wie Mossotti gezeigt hat, unter gleicher Bedeutung der Grössen  $e$ ,  $v$  und  $g$ , auch für die dielectricische Polarisation, nur muss dann unter  $k = (K-1)/4\pi$  verstanden werden, wo  $K$  die Dielectricitätsconstante der Substanz bezeichnet.

Da sich für das Eisen das Verhältniss  $g = 134/135$  herausstellte, die Raumerfüllung durch die Molecüle als eine so vollständige sich ergab, wie sie unter Voraussetzung gleich grosser, kugelförmiger Molecüle gar nicht erreichbar ist, sah sich Betti<sup>2)</sup> veranlasst, die Poisson'sche Grundannahme in etwas zu modificiren und er wurde hiedurch für  $k$  zum Ausdrucke geführt:

$$(2) \quad k = \frac{3g}{4\pi(1-3g)},$$

aus welchem für Eisen speciell  $g = 134/403$  sich ergab; damit kam die eben erwähnte, von Maxwell<sup>3)</sup> zuerst hervor gehobene Schwierigkeit in Wegfall.

1) S. G. Wiedemann, Lehrb. d. Electr. 2. p. 18. Maxwell, Lehrb. d. Electr. 2. § 430.

2) Betti, Lehrb. d. Potentialtheorie. p. 377 und 378.

3) S. Maxwell, Lehrb. der Electr. u. Magn. 2. § 430. S. auch Mascart u. Joubert, Lehrb. der Electr. p. 147.

Für die Beschreibung der Erscheinungen der magnetischen, beziehungsweise dielectricischen Polarisation ist es, da diese auf die Grösse  $k$  selbst sich aufbaut, ganz irrelevant, ob man  $k$  durch die Ausdrücke (1), resp. (2) definirt ansieht, oder schlechtweg als empirische Constante auffasst; wohl aber ist eine Entscheidung hierüber insofern von Interesse, als Formel (1) von einigen Autoren zum Ausgangspunkt für die Bestimmung der Grösse der Molecüle aus  $g$  gemacht wurde.

Es ist nun vielleicht bemerkenswerth, dass, sowie man  $k$  als durch die Gleichung (1), bezw. (2) definirte Function von  $g$  auffasst, damit gleichzeitig über eine zweite durch Helmholtz<sup>1)</sup> und Kirchhoff<sup>2)</sup> eingeführte und zur Beschreibung der an magnetisch oder dielectricisch polarisirten Körpern auftretenden Druckkräfte verwendete Constante:

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \log v}$$

verfügt wird.

Es ist nämlich:

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \log v} = \frac{\partial k}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \log v} = -g \frac{\partial k}{\partial g},$$

wie sich mit Leichtigkeit aus (1) ergibt.

Unter Zugrundelegung der Poisson'schen Formel (1) ergibt sich also:

$$(3) \quad k' = \frac{\partial k}{\partial \log v} = -k \left( 1 + \frac{4\pi k}{3} \right)$$

hingegen unter Zugrundelegung der Betti'schen Formel (2):

$$(4) \quad k' = \frac{\partial k}{\partial \log x} = -k (1 + 4\pi k).$$

Beide Formeln (3) und (4) ergeben für die Magnetsirungszahl  $k$ , beziehungsweise die Dielectricitätsconstante  $K = 1 + 4\pi k$ , eine Abnahme derselben bei gleichmässiger Volumenzunahme.

Beide ergeben für sehr schwach magnetisch, respective dielectricisch polarisirbare Substanzen, bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$(5) \quad k' = \frac{\partial k}{\partial \log v} = -k;$$

1) S. Helmholtz, Wied. Ann. 13. p. 397. 1881.

2) S. Kirchhoff, Wied. Ann. 24. p. 55. 1885.

sonst aber  $k'$  als quadratische Function von  $k$ , also in der Grössenordnung übereinstimmend.

An der Hand experimenteller Ergebnisse über die Abhängigkeit des  $k$  von der Volumenzunahme ist also eine Entscheidung darüber möglich, ob und in wie weit Poisson's, bezw. Betti's Formel mit den Thatsachen in Einklang steht.

Directe Versuchsergebnisse nach dieser Richtung liegen nur rücksichtlich der Gase vor.

Die durch Boltzmann<sup>1)</sup> für dieselben geführten Messungen haben zunächst ergeben, dass ihre Dielectricitätsconstante mit dem Druck in linearer Weise zunimmt. Macht man mit Boltzmann die weitere Annahme, „dass die Proportionalität des Zuwachses der Dielectricitätsconstante mit dem Druckzuwachse bis zur absoluten Evacuierung gültig sei“, dann lassen seine Versuchsergebnisse in die zwei von ihm aufgestellten Formeln sich fassen, von denen die erste die Dielectricitätsconstante für den Normaldruck einer Atmosphäre:

$$(6_a) \quad K_1 = 1 + \lambda$$

ergibt, während die andere ihre Abhängigkeit vom Drucke  $p$  durch:

$$(6) \quad K = (1 + \lambda p)$$

feststellt.

Aus (6) folgt:

$$\frac{\partial K}{\partial \log p} = \lambda p = K - 1 = 4\pi k.$$

Nun ist aber für ein Gas  $pv = \text{const.}$ , und dementsprechend  $d \log p = -d \log v$ , daher:

$$-\frac{\partial K}{\partial \log p} = \frac{\partial K}{\partial \log v} = 4\pi k' = -4\pi k,$$

woraus sich also in Uebereinstimmung mit der aus Poisson's und Betti's Formeln (1) und (2) gefolgerten Formel (5):

$$k' = -k \quad \text{ergibt.}^2)$$

Für andere Substanzen als Gase liegen directe Ver-

1) S. Boltzmann, Wien. Ber. 69. 2. p. 800 und 801. 1874.

2) Die gleiche Abhängigkeit vom Druck scheint für die Magnetisierungszahl der Gase durch die Versuche Quincke's (Wied. Ann. 34. p. 405 u. 431. 1888) erwiesen zu sein.

suchesresultate über die Aenderung des  $k$  mit Volumenänderung nicht vor.

Es ist jedoch nach der von Helmholtz und Kirchhoff gegebenen Theorie der Formveränderung magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper die Grösse von  $k'$  mit  $k$  gemeinsam entscheidend für die Volumenänderung, die diese Körper im electrischen, bezw. magnetischen Felde erfahren.

Versuche, welche Quincke<sup>1)</sup> an Flüssigkeiten im electrischen Felde angestellt hat, haben ergeben, dass Substanzen nahezu gleicher Dielectricitätsconstante in Bezug auf die resultirende Volumenänderung ein total verschiedenes Verhalten<sup>2)</sup> zeigen. Es scheint dies dafür zu sprechen, dass wenigstens hier  $k'$  eine selbstständige, für die einzelnen Substanzen charakteristische Constante ist. Für diese Substanzen scheint also Poisson's Formel (1), resp. Betti's (2), welche  $k'$  in ganz bestimmter, durch Formeln (3) und (4) festgelegter Weise an  $k$  binden, mit der Erfahrung im Widerspruche zu stehen,  $k$  scheint für diese Substanzen als lediglich empirische Constante aufzufassen zu sein.

Aus der hier geführten Betrachtung folgt weiterhin, dass die von mehreren Autoren vorgenommene Verwendung der Poisson'schen Formel (1) zur Bestimmung des von den Moleculen wirklich eingenommenen Bruchtheils  $g$  des Volumens und damit zur Berechnung ihrer Grösse nur für die Gase statthaft ist, für andere Substanzen aber der Strenge entbehrt.

1) Quincke, Wied. Ann. 10. p. 523 ff. 1890.

2) Es ergab sich für Terpentinöl, dessen  $K=2,412$  ist  $\Delta v/v \cdot 10^6 = 1,7$ , für Steinöl, dessen  $K=2,124$ ,  $\Delta v/v \cdot 10^6 = 19,23$ , für Rübol, dessen  $K=2,442$   $\Delta v/v = -18,24 \cdot 10^{-6}$ , also eine Volumenabnahme.

#### Nekrolog.

Am 23. Juni 1891 verschied zu Göttingen  
 Wilhelm Eduard Weber  
 geboren zu Wittenberg am 24. October 1804.